

BERICHTE
AUS DEM
INSTITUT FÜR MEERESKUNDE
AN DER
CHRISTIAN-ALBRECHTS-UNIVERSITÄT KIEL

Nr. 83

ZUR ERZEUGUNG GROSSRÄUMIGER OZEANISCHER STRÖMUNGS-
SCHWANKUNGEN IN MITTLEREN BREITEN DURCH VERÄNDERLICHE
WINDFELDER

VON

JÜRGEN WILLEBRAND

DOI 10.3289/IFM-BER-83

Kopien dieser Arbeit können bezogen werden von:
Institut für Meereskunde an der Universität Kiel
Abt. Theoretische Ozeanographie
23/Kiel
Düsternbrooker Weg 20

ISSN 0341-8561

ZUSAMMENFASSUNG

Die Erzeugung von Strömungsschwankungen im Ozean durch grossräumige fluktuierende Windfelder wird mit verschiedenen theoretischen Modellen untersucht. Charakteristische Parameter des Windfeldes werden aus einer Analyse von Wetterkarten sowie Wetterschiffbeobachtungen bestimmt. Die prinzipielle Struktur der ozeanischen Relation wird an Hand eines linearen analytischen Modells diskutiert, welches auf der quasigeostrophischen Approximation beruht. Die induzierten Strömungen sind für Zeitskalen zwischen einem Tag und einem Jahr vorwiegend barotrop. Es lassen sich drei Frequenzbereiche identifizieren, in denen die ozeanische Reaktion bestimmt wird von

- i) nichtresonant erzwungenen Schwingungen,
- ii) resonant erzeugten planetarischen Wellen,
- und
- iii) einem zeitabhängigen Sverdrup-Gleichgewicht.

Atmosphärische und ozeanische Parameter sind trotz ihrer kausalen Kopplung im wesentlichen unkorreliert. Mit Hilfe eines numerischen Modells wird der Einfluß von Nichtlinearität sowie unregelmässiger Geometrie bzw. Topographie untersucht.

SUMMARY

The generation of oceanic current-fluctuations by large-scale atmospheric disturbances is investigated. Characteristical parameters of the wind field over the ocean are determined from an analysis of the NMC weather maps and Ocean Weather Station data. The principal pattern of the oceanic response can be derived from linear quasigeostrophic theory. The induced currents are found to be more or less barotropic for time scales between a day and a year. Three frequency ranges can be identified, where the response is dominated by

- i) non-resonant forced oscillations,
- ii) resonantly generated planetary waves,
and
- iii) a time-variable Sverdrup balance.

Atmospheric and oceanic variables, though being coupled causally, are practically uncorrelated. A numerical method is used to study the influence of nonlinearity and irregular geometry resp. topography.

Inhaltsverzeichnis

	Seite
I. EINLEITUNG	1
II. ZUR STRUKTUR METEOROLOGISCHER FELDER ÜBER DEM OZEAN .	6
II.1. Empirische Beziehungen	6
II.2. Statistische Eigenschaften der atmosphäri- schen Felder	7
II.3. Beobachtete Spektralgrößen der atmosphäri- schen Felder	10
II.3.1. Frequenzspektren	10
II.3.2. Kreuzspektren	12
II.3.3. Räumliche Skalen	12
II.4. Modell des Spektraltensors	19
II.4.1. Zusammenhang zwischen Druck- und Schub- spannungsspektrum	19
II.4.2. Invarianzeigenschaften	21
II.4.3. Analytische Darstellung	22
III. BEWEGUNGSGLEICHUNGEN GROSSRÄUMIGER STRÖMUNGEN	26
III.1. Allgemeines	26
III.2. Die vertikale Eindringtiefe	27
III.3. Bewegungsgleichungen für den Massentransport.	30
III.4. Quasigeostrophische Approximation	34
IV. ANALYTISCHES MODELL WINDBEDINGTER STRÖMUNGSSCHWAN- KUNGEN	38
IV.1. Weitere Vereinfachung der Vorticity-Gleichung	38
IV.2. Freie Wellen und Eigenschwingungen 2. Art . .	40
IV.3. Erzwungene Oszillationen	42
IV.4. Statistische Darstellung der ozeanischen Reak- tion	48
IV.5. Diskussion der Übertragungsfunktion	51
IV.5.1. Unbegrenztes Gebiet	51
IV.5.2. Abgeschlossenes Becken	56
IV.6. Frequenzspektren des Massentransports und der Stromfunktion	60
IV.7. Korrelation zwischen ozeanischen und atmos- phärischen Variablen	65

	Seite
V. NUMERISCHE INTEGRATION DER BEWEGUNGSGLEICHUNGEN . . .	72
V.1. Das numerische Modell	72
V.2. Lösung im rechteckigen Becken	76
V.3. Rektifikation	82
V.4. Der Einfluß der Bodentopographie	87
VI. SCHLUSSBEMERKUNG	93
Literaturverzeichnis	96

Anhänge

I. EINLEITUNG

Es ist seit langem bekannt, daß das Strömungsfeld wie auch weitere Zustandsvariable im Ozean keineswegs konstant sind, sondern teilweise starke Veränderlichkeit in Ort und Zeit aufweisen. Im abgelaufenen Jahrzehnt sind insbesondere Schwankungen mit einer Horizontalskala von etwa 100-1000 km und einer Zeitskala von einigen Tagen bis zu einigen Monaten in das Zentrum des Interesses gerückt. Schwankungen in diesem Skalenbereich sind besonders energiereich, und es besteht die Möglichkeit, daß mittlere Zirkulation und Wärme fluß im Ozean wesentlich von solchen Schwankungen beeinflußt werden.

Zahlreiche Experimente haben die Kenntnis über die Kinematik niederfrequenter Strömungsschwankungen beträchtlich erweitert. Insbesondere typische Amplituden und Skalen der raumzeitlichen Veränderlichkeit sind einigermaßen gut bekannt. Sehr viel weniger wissen wir dagegen über die Ursache von Strömungsschwankungen. Eine ausführliche Darstellung aller dynamisch wichtigen Prozesse wird von RHINES (1977) gegeben. Im wesentlichen kommen zwei verschiedene Erzeugungsmechanismen in Betracht:

- 1) Instabilität der mittleren Zirkulation
- 2) Erzeugung durch fluktuierende meteorologische Felder.

Das mit der mittleren Zirkulation verknüpfte Massenf eld enthält eine große Menge an verfügbarer potentieller Energie, welche unter gewissen Bedingungen in fluktuierende kinetische Energie umgesetzt werden kann (barokline Instabilität). Ebenso kann von der kinetischen Energie des mittleren Strömungsfeldes Energie an die fluktuierende Komponente übergehen (barotrope Instabilität). Instabilitätsmechanismen spielen für die atmosphärische Zirkulation eine entscheidende Rolle (s. z.B. FORTAK, 1971); eine Übersicht über die zahlreichen theoretischen Untersuchungen dieser Prozesse findet sich bei PEDLOSKY (1979).

Das numerische Modell von HOLLAND & LIN (1975) verstärkte die seit längerem gehegte Vermutung, daß auch die ozeanische Zirkulation instabil gegenüber kleinen Störungen ist. Ein stationärer

Gleichgewichtszustand wird in diesem Modell nur noch im statistischen Sinne erreicht; Fluktuationen bilden einen wesentlichen Teil dieses Gleichgewichts. Die Auswertung von historischem Beobachtungsmaterial durch WYRTKI et al (1976) sowie DANTZLER (1976) ergab, daß die Amplitude von Strömungs- und Temperaturschwankungen besonders groß in Gebieten starker mittlerer Strömung, d.h. auch großer potentieller Energie des mittleren Massenfeldes, ist. Es besteht daher wenig Zweifel daran, daß Instabilitätsmechanismen zumindestens in Teilen des Ozeans eine wichtige Rolle spielen.

Die Möglichkeit, daß veränderliche atmosphärische Felder Strömungsänderungen im Ozean hervorrufen, ist in zahlreichen Arbeiten betrachtet worden. Nachdem durch die Untersuchungen von STOMMEL (1948) und MUNK (1950) ein grundlegendes Verständnis der Dynamik der ozeanischen Zirkulation als Folge des Windfeldes erreicht war, wurde der Einfluß von Windfluktuationen erstmalig von VERONIS & STOMMEL (1956) untersucht. Spätere Untersuchungen kommen von LONGUET-HIGGINS (1965), PEDLOSKY (1965, 1967), PHILLIPS (1966), VERONIS (1970), PHILANDER (1978), LEETMA (1978), HARRISON (1979). Die erwähnten Autoren betrachten lineare oder quasilineare analytische Modelle mit einer idealisierten Darstellung des Windfeldes, meist in Form einer stehenden oder fortschreitenden harmonischen Welle. MAGAARD (1977) betrachtete neben Windänderungen auch Änderung des Luftdrucks und das Auftriebsflusses als antreibende Kraft.

Die Ergebnisse dieser Arbeiten lassen sich stark vereinfacht etwa folgendermaßen zusammenfassen:

- 1) Raumzeitliche Änderungen der Rotation der Windschubspannung induzieren Strömungsschwankungen im Ozean, deren Amplitude, außer von der Größe der antreibenden Kraft, sehr empfindlich von den Reibungsparametern des Modells abhängt.
- 2) Die raumzeitlichen Skalen der Strömungsschwankungen entsprechen wegen der Linearität der Modelle den Skalen der atmosphärischen Veränderlichkeit, modifiziert durch den Einfluß der Beckengeometrie.

- 3) Änderungen von Luftdruck und Auftriebsfluß erzeugen im allgemeinen Strömungen geringerer Amplitude als Windänderungen
- 4) Nichtlineare Effekte bewirken die Rektifikation der Strömungsschwankungen, die somit zur mittleren Zirkulation beitragen können. Nach VERONIS (1970) ist dieser Effekt von erheblicher Größenordnung.

Es gibt einige Beobachtungen ozeanischer Veränderlichkeit, welche auf direkte atmosphärische Erzeugung hinweisen. BROWN et al (1975) fanden marginale Kohärenz zwischen Schwankungen des Luftdrucks und des Drucks am Meeresboden im MODE-Gebiet bei einer Periode von etwa 10 d. MEINCKE (1976) beobachtete im Bereich des Island-Faröer-Rückens Änderungen des Bodenstromes während des Durchzugs eines Tiefdruckgebietes. Allerdings ergab eine spätere Analyse keinen statistisch signifikanten Zusammenhang zwischen ozeanischen und atmosphärischen Variablen (WILLEBRAND & MEINCKE, 1980). Im antarktischen Zirkumpolarstrom fanden BAKER et al (1977) marginale Kohärenz zwischen Änderungen des Windes und des Bodendruckgradienten bei einer Periode von 5 Tagen. GREISMAN & AAGARD (1979) fanden eine Korrelation von monatlichen Schwankungen des West-Spitzbergenstromes zur Rotation der Windschubspannung.

Berücksichtigt man die große Zahl von Experimenten, bei denen vergeblich nach einem Zusammenhang zwischen ozeanischen und atmosphärischen Variablen gesucht wurde, so kommt man zu dem Ergebnis, daß diese Variablen in aller Regel miteinander nicht korreliert sind. Hinzu kommt, daß die vorherrschenden Raum-Zeitskalen in Ozean und Atmosphäre sehr verschieden sind. In der Atmosphäre liegen diese bei einigen 1000 km sowie bei 3-5 Tagen. Im Ozean ist die vorherrschende räumliche Skala kleiner, die zeitliche Skala dagegen größer, jeweils um etwa eine Größenordnung. Ferner sind auch charakteristischen Ausbreitungseigenschaften verschieden: in der Atmosphäre herrscht in mittleren Breiten ostwärts gerichtete Ausbreitung der synoptischen Störungen vor, während im Ozean vorwiegend Propagation nach Westen beobachtet wurde. Aus diesen Gründen ist es lange Zeit hindurch als unwahrscheinlich angesehen worden, daß atmosphärische Anregung in diesem Skalenbereich ein relevanter Vorgang ist.

Nun ist es aber denkbar, daß trotz des Fehlens der Korrelation ein kausaler Zusammenhang zwischen ozeanischen und atmosphärischen Feldern besteht. Um dies zu verstehen, muß man die statistische Natur der meteorologischen Felder in Betracht ziehen. Wegen der prinzipiellen Grenzen der Vorhersagbarkeit meteorologischer Variabler über Zeiträume von mehr als einigen Wochen ist es angebracht, diese Felder als stochastische Größen anzusehen. Dadurch wird die ozeanische Reaktion natürlich ebenfalls stochastisch. Ist die spektrale Bandbreite der Felder hinreichend groß, dann können die typischen Skalen in Ozean und Atmosphäre durchaus sehr verschieden sein. Diese Idee wurde von HASSELMANN (1976) auf einfache Modelle von Klimaschwankungen, die durch kurzzeitige Fluktuationen in der Atmosphäre entstehen können, angewandt. FRANKIGNOUL & MÜLLER (1979a) bestimmten mit Hilfe eines linearen stochastischen Modells den mittleren Energiefluß von Wind in den Ozean; in einer neueren Arbeit (MÜLLER & FRANKIGNOUL, 1980) berechneten diese Autoren auch spektrale Eigenschaften der ozeanischen Reaktion auf variable Windfelder.

In der vorliegenden Arbeit werden verschiedene Aspekte des Problems der windbedingten Strömungsschwankungen behandelt. Kapitel II beschäftigt sich mit den statistischen Eigenschaften atmosphärischer Felder. Eine Analyse der Daten von Wetterkarten und einzelnen Wetterstationen ergibt die wichtigsten Parameter von Wind- und Luftdruckfeld über dem Ozean (WILLEBRAND, 1978). Die Verträglichkeit dieser Parameter mit einem analytischen Modell der Spektren wird untersucht.

In Kapitel III werden die Bewegungsgleichungen für ozeanische Strömungen diskutiert. Ein heuristisches Argument für die Vernachlässigung der baroklinen Reaktion des Ozeans in einem weiten Frequenzbereich wird gegeben. Durch Störungsentwicklung wird die quasigeostrophische Form der Bewegungsgleichungen erhalten.

Auf der Basis dieser Gleichungen wird in Kapitel IV ein lineares analytisches Modell winderzeugter Strömungen betrachtet. Die atmosphärische Anregung wird als homogener und stationärer

stochastischer Prozess angesehen, der durch seinen Spektraltensor charakterisiert wird. Die statistische Übertragungsfunktion als wichtigste, die ozeanische Reaktion beschreibende Größe wird berechnet und diskutiert. Die typische Form lokaler Strömungsspektren, und ihre Abhängigkeit von den Reibungsparametern, wird ermittelt. Ferner wird untersucht, zwischen welchen Variablen in Ozean und Atmosphäre man lineare Korrelation bzw. Kohärenz erwarten kann.

In Kapitel V werden diese Betrachtungen mit einem Modell wiederholt, welches der Realität im Ozean sehr viel näher kommt als das von Kapitel IV. Die vertikal gemittelten Bewegungsgleichungen werden numerisch integriert, wobei die meteorologische Anregung von beobachteten Wetterkarten abgeleitet wird (WILLEBRAND et al 1980). Das Ergebnis der Integration wird als Realisierung eines stochastischen Prozesses interpretiert. Der Einfluß, den die Fluktuationen wegen der Nichtlinearität der Bewegungsgleichungen auf die mittlere Zirkulation haben, wird untersucht. Ebenso wird der Effekt von realistischer Geometrie und Topographie am Beispiel eines Modells des atlantischen Ozeans betrachtet.

Kapitel VI schließlich enthält eine kurze Zusammenfassung der wesentlichen Ergebnisse und eine Diskussion der wichtigsten offen gebliebenen Fragen.

II. ZUR STRUKTUR METEOROLOGISCHER FELDER ÜBER DEM OZEAN

II.1. Empirische Beziehungen

Die für den Ozeanographen wichtigsten Parameter an der Grenzfläche Ozean-Atmosphäre sind die Flüsse von Impuls, Masse und Wärme, die für den Ozean die Rolle antreibender Kräfte haben. Die Normalkomponente des Impulsflußensors wird beschrieben durch Luftdruck p sowie tangentielle Schubspannung τ . Der Wärmefluß ergibt sich im wesentlichen als Summe der Flüsse von sensibler, latenter sowie Strahlungswärme, der Massenfluß als Differenz von Niederschlag und Verdunstung. Die folgenden Betrachtungen zur raumzeitlichen Variabilität beschränken sich auf den Impulsfluß, d.h. Luftdruck und Schubspannung.

Die turbulente Schubspannung kann in der Regel nicht direkt gemessen werden. Auf die verschiedenen Möglichkeiten zu ihrer Bestimmung wird hier nicht eingegangen. Wir werden im folgenden die auf SVERDRUP (1937) zurückgehende halbempirische Formel verwenden, welche die Schubspannung mit der Windgeschwindigkeit gemäß

$$\tau = \rho_a C_D |\underline{U}| \underline{U} \quad (2.1)$$

verknüpft. Dabei bedeuten ρ_a Dichte der Luft, \underline{U} Windgeschwindigkeit in 10 m Höhe, und C_D einen empirischen dimensionslosen Koeffizienten. Nach GARRATT (1977) setzen wir

$$C_D = (0.75 + 0.067 |\underline{U}|) \cdot 10^{-3} \quad (2.2)$$

wobei \underline{U} in m/s zu nehmen ist. Die durch (2.2) gegebenen Werte liegen etwas über den von SMITH & BANKE (1975) angegebenen, jedoch unterhalb der Abschätzungen von BUNKER (1976). Es zeigt sich, daß im niederfrequenten Bereich ($\omega < 0.1$ cpd) die Struktur von (2.2) fast keinen Einfluß auf die Form der Schubspannungsspektren hat. Bei höheren Frequenzen ergibt sich da-

gegen ein deutlicher Einfluß in dem Sinne, daß das Spektrum um so flacher wird, je stärker C_D von $|\underline{U}|$ abhängt.

Information über die raumzeitliche Struktur der verschiedenen Felder erhält man, außer von Zeitreihen der ozeanischen Wetterschiffe, in erster Linie aus der Analyse von Bodenwetterkarten, die gewöhnlich nur für Druck und Temperatur, nicht aber für den Wind erstellt werden. Der Wind wird dann aus dem Druckfeld gemäß der folgenden quasigeostrophischen Beziehung bestimmt

$$u_1 = - \frac{c_g}{f \rho_a} \left(\frac{\partial p}{\partial x_2} \cos \varphi_g + \frac{\partial p}{\partial x_1} \sin \varphi_g \right) \quad (2.3)$$

$$u_2 = \frac{c_g}{f \rho_a} \left(\frac{\partial p}{\partial x_1} \cos \varphi_g - \frac{\partial p}{\partial x_2} \sin \varphi_g \right)$$

Dabei ist $f = 2 \Omega \sin \theta$ der Coriolisparameter, und c_g , ϕ_g sind empirisch bestimmte dimensionslose Größen, die von verschiedenen Parametern abhängen können (s. z.B. HASSE & WAGNER, 1971).

In dieser Arbeit sind durchweg die konstanten Werte $c_g = 0.7$ und $\phi_g = 15^\circ$ benutzt worden. Die Datenbasis, die den eigenen Untersuchungen zugrunde liegt, besteht aus Zeitreihen mehr als 20-jähriger Dauer der Variablen p und \underline{U} an den atlantischen Wetterstationen C und D, sowie aus Wetterkarten der Nordhemisphäre von 1973-76, herausgegeben vom National Meteorological Center der USA. Eine eingehende Beschreibung der Daten sowie der verwendeten Analysemethoden findet sich bei WILLEBRAND (1978), im folgenden als I bezeichnet.

II.2. Statistische Eigenschaften der atmosphärischen Felder

Die geographische Verteilung der zeitlich gemittelten Schubspannung über dem Ozean wurde zuletzt von LEETMA & BUNKER (1978) sowie in I bestimmt. Für die Erzeugung von Strömungsschwankungen im Meer ist die mittlere Schubspannung allerdings nur indirekt von Bedeutung, nämlich über Instabilitätsmechanismen der windbedingten ozeanischen Zirkulation. Von direktem Interesse sind dagegen die Abweichungen vom Mittelwert. Abb. 2.1 zeigt die

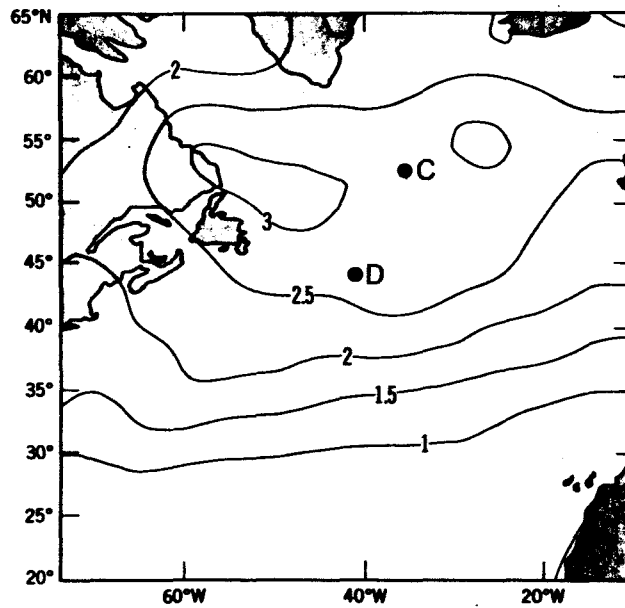


Abb. 2.1:

Mittlere quadratische (rms) Amplitude der Schubspannungsfluktuationen in dyn/cm^2 über dem Nordatlantik in den Jahren 1973-76 nach I.

rms-Amplitude der Schubspannungsfluktuationen über dem Nordatlantik. Während die zonalen Änderungen gering sind, ergeben sich in meridionaler Richtung Unterschiede um einen Faktor $o(3)$, mit einem Maximum bei etwa 50° N. Die Amplitude der Luftdruckschwankungen verhält sich qualitativ sehr ähnlich.

Schubspannung und Luftdruck lassen sich also nicht ohne weiteres als im statistischen Sinne horizontal homogene Felder ansehen. Wie in I gezeigt, erstreckt sich aber in mittleren Breiten, etwa zwischen $30^\circ - 55^\circ$, die horizontale Inhomogenität nur auf die Amplitude der Felder. Andere Eigenschaften, insbesondere die Form der Frequenz-Wellenzahlspektren, sind dagegen weitgehend konstant. Entsprechendes gilt auch für die zeitliche Instationarität: Während die Amplitude der Fluktuationen sich beträchtlich mit der Jahreszeit ändert, bleiben andere charakteristische Eigenschaften durchweg erhalten.

Mit diesen Einschränkungen ist es möglich, die meteorologischen Felder lokal als statisch stationäre und homogene Funktionen anzusehen. Im Rahmen einer statistischen Theorie zweiter Ordnung werden diese vollständig durch ihren Mittelwert sowie den Energie-Spektraltensor bestimmt. Die allgemeine Definition des Spektraltensors für stationäre und homogene Zufallsfelder ist im Anhang A gegeben. Wir werden im einzelnen benötigen:

- 1) $F_p(k, \omega)$, das Frequenz-Wellenzahlspektrum des Luftdrucks
- 2) $F_{\tau_{\alpha\tau\beta}}(k, \omega)$, den Spektraltensor der Schubspannung
- 3) $F_{v_{x\tau}}(k, \omega)$, das Frequenz-Wellenzahlspektrum der Schubspannungsrotation.

Die letztere Größe ist mit dem Schubspannungstensor verknüpft durch

$$F_{v_{x\tau}} = k_1^2 F_{\tau_2 \tau_2} + k_2^2 F_{\tau_1 \tau_1} - k_1 k_2 (F_{\tau_1 \tau_2} + F_{\tau_2 \tau_1}) \quad (2.4)$$

Versuche, diese Spektren direkt aus Schiffsbeobachtungen von

Wind und Luftdruck zu bestimmen, wurden von EMERY et al (1980) sowie von GOLDENBERG & O'BRIEN (1980) unternommen. Wie weiter unten noch ausgeführt wird, ist eine solche direkte Bestimmung mit dem in der vorliegenden Arbeit benutzten Datenmaterial nicht möglich. Wir werden im folgenden einige ausgewählte Beobachtungsergebnisse diskutieren, die indirekt wichtige Merkmale der Spektren erkennen lassen. Anschließend wird ein von FRANKIGNOUL & MÜLLER (1979a) vorgeschlagener analytischer Ansatz für das Windspektrum auf seine Verträglichkeit mit diesen Beobachtungen untersucht.

II.3. Beobachtete Spektralgrößen der atmosphärischen Felder

II.3.1. Frequenzspektren

Abb. 2.2 zeigt Frequenzspektren des Luftdrucks, der Schubspannungskomponenten sowie des Betrags der Schubspannung bei Wetterstation C. Die wichtigsten Eigenschaften der beobachteten Spektren lassen sich folgendermaßen zusammenfassen:

- 1) Mit Ausnahme der Jahresperiode sind alle Spektren nahezu weiß, d.h. unabhängig von der Frequenz, für Perioden oberhalb von etwa 10 Tagen. Dies gilt insbesondere für die Schubspannungsspektren, in geringerem Maße für den Luftdruck.
- 2) Das jährliche Signal ist besonders ausgeprägt in p und $|\underline{\tau}|$, in geringerem Maße in τ_1 . Es fehlt völlig in τ_2 .
- 3) Bei sehr kurzen Perioden folgen die Spektren näherungsweise einem Potenzgesetz $\omega^{-\alpha}$, mit $\alpha \approx 2.5$ für den Druck und $\alpha \approx 1.5$ für die Schubspannung.
- 4) Die Ostkomponente der Schubspannung, τ_1 , hat nahezu im gesamten Frequenzbereich um einen Faktor 0(2) mehr Energie als die Nordkomponente.

Abb. 2.3 zeigt Frequenzspektren der Schubspannungsrotation $\nabla \times \underline{\tau}$ sowie der Variablen $(f/g)\partial p/\partial t$. Wie weiter unten (vgl. (4.2)) gezeigt wird, sind diese Größen direkt als antreibende

Abb. 2.2:

Frequenzspektren von
Luftdruck, Schubspan-
nungskomponenten sowie
Schubspannungsbetrag
nach I.

Ordinateneinheit:

$(\text{mb})^2/\text{cpd}$ (Luftdruck)
 $(\text{dyn}/\text{cm}^2)^2/\text{cpd}$ (Schub-
spannung)

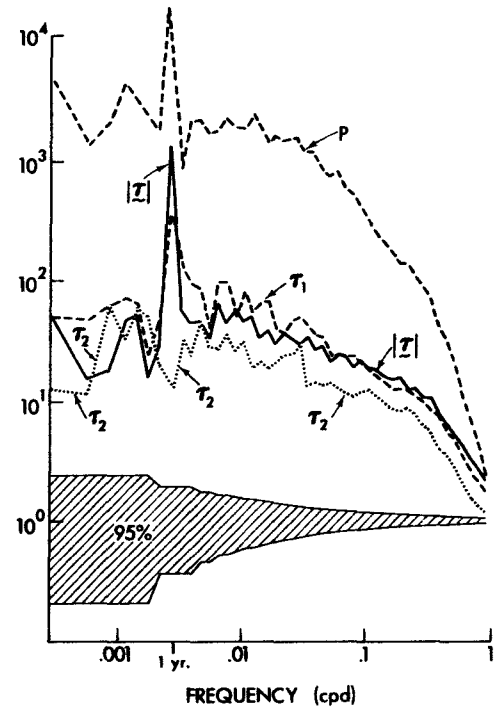
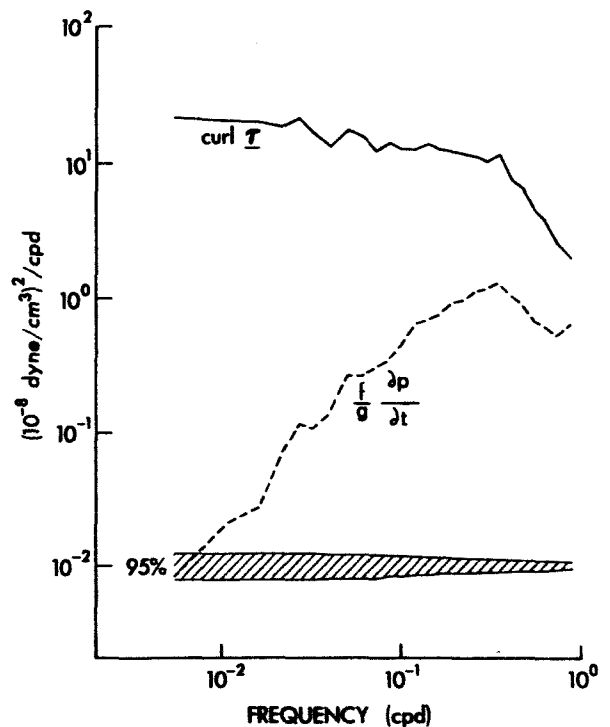


Abb. 2.3:

Frequenzspektrum der
Schubspannungsrotation
sowie der normalisier-
ten zeitlichen Luft-
druckänderung. Breiten-
mittelwerte über dem
Nordpazifik bei 42° N,
berechnet aus Wetter-
karten von 1973-76.



Kräfte für ozeanische Strömungen vergleichbar. Während das Vx_1 -Spektrum qualitativ den oben gezeigten Spektren entspricht, verhält sich die zeitliche Druckänderung ganz verschieden, mit einem im niederfrequenten Bereich "blauen", d.h. mit der Frequenz ansteigenden Spektrum. Dessen Wert liegt weit unterhalb dem des Vx_1 -Spektrums. Der Schluß, daß die Luftdruckänderungen im Vergleich zur Schubspannung vernachlässigbar sind, ist allerdings erst dann erlaubt, wenn gezeigt ist, daß ein solches Größenverhältnis bei allen interessierenden Wellenzahlen besteht. Für das weiter unten (vgl. (2.22)) angegebene Modellspektrum haben FRANKIGNOUL & MÜLLER (1979a) gezeigt, daß dies tatsächlich der Fall ist, ausgenommen bei sehr kleinen Wellenzahlen und sehr großen Frequenzen.

II.3.2. Kreuzspektren

Abb. 2.4 zeigt Kohärenz und Phase zwischen den Schubspannungskomponenten bei Wetterstation C. Im gesamten niederfrequenten Bereich sind τ_1 und τ_2 vollständig unkorreliert. Nur für Perioden unterhalb von 10 d ergibt sich eine zwar kleine, aber statistisch signifikante Kohärenz, mit einer zugehörigen Phasendifferenz von nahezu 180° . Abb. 2.5 zeigt Kohärenz und Phasendifferenz zwischen dem Luftdruck und den beiden Schubspannungskomponenten. Auch hier finden wir keine signifikante Kohärenz bei niedrigen Frequenzen, mit Ausnahme der p - τ_1 -Kohärenz bei der jährlichen Periode. Bei höheren Frequenzen sind Druck und Schubspannung jedoch eindeutig korreliert, mit einer Phasendifferenz in der Nähe von -90° (p - τ_1) bzw. $+90^\circ$ (p - τ_2).

II.3.3. Räumliche Skalen

Der traditionelle Weg, um Information über die räumliche Struktur von Zufallsfeldern zu erhalten, besteht in der Auswertung von gleichzeitigen Messungen eines Feldes an verschiedenen Orten.

Abb. 2.4:

Kohärenz und Phasendifferenz zwischen Ost- und Nordkomponente der Schubspannung bei Wetterstation C.

Für dieses und alle folgenden Kohärenz- und Phasendiagramme gilt: Die Phase ist positiv, wenn die erstgenannte Variable führt. Fehler-schranken geben das 95%-Konfidenzintervall an. Der schraffierte Bereich entspricht dem 95%-Intervall bei verschwindender wahrer Kohärenz.

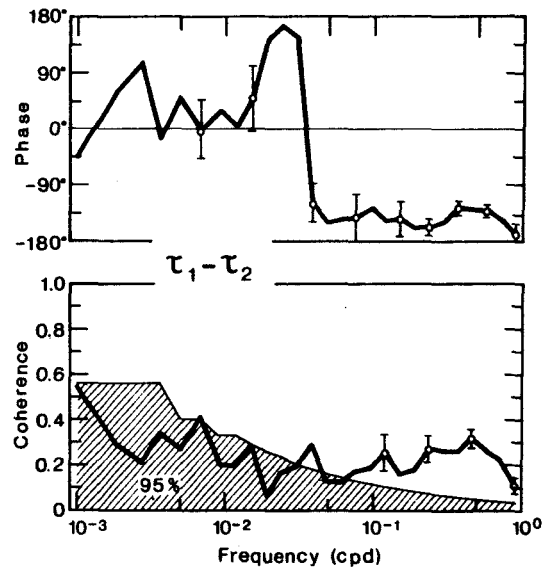
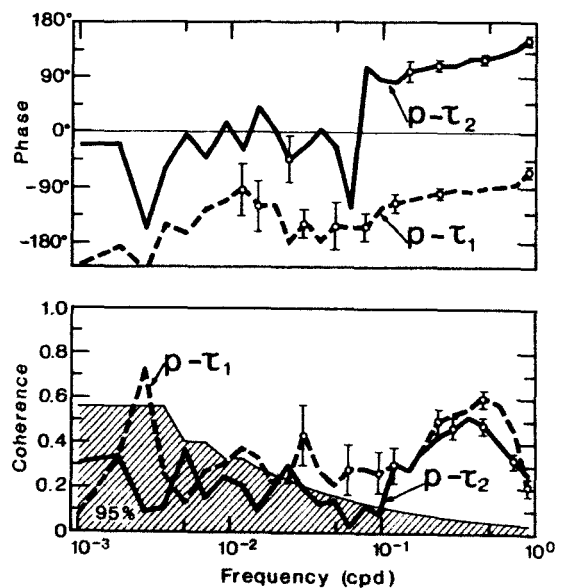
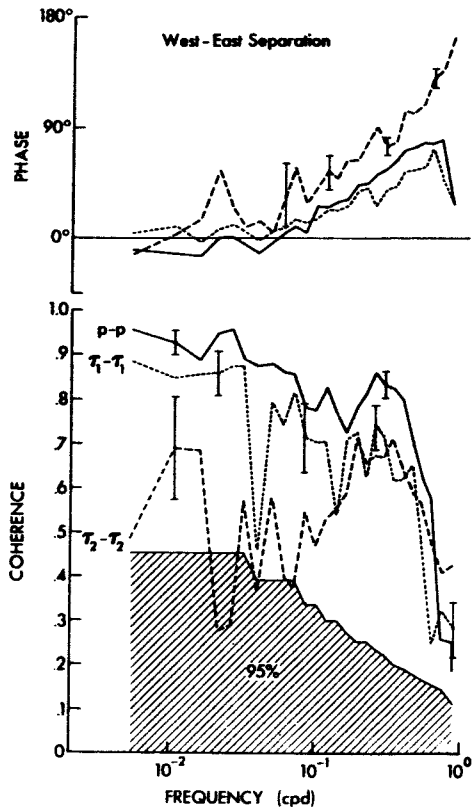


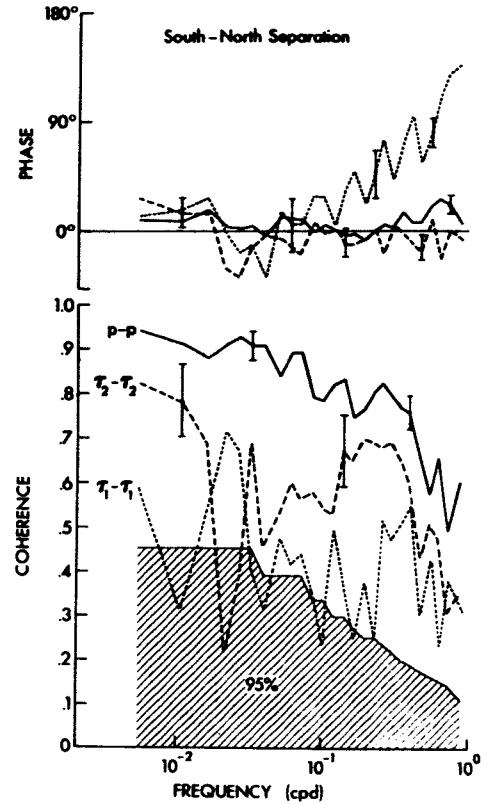
Abb. 2.5:

Kohärenz und Phasendifferenz zwischen Luftdruck und Schubspannungskomponenten bei Wetterstation C.





a



b

Abb. 2.6:

Kohärenz und Phasendifferenz von Luftdruck und Schubspannung an getrennten Orten.

a) Ost-West-Separation von 730 km

b) Nord-Süd-Separation von 670 km

Phase positiv falls westlich (südlich) gelegene Station führt. Breitenmittel über dem Nordpazifik bei 43° N.

Abb. 2.6 zeigt Kohärenz und Phasendifferenz der drei betrachteten Felder an Orten, die um 730 km in Ost-West-Richtung (Abb. 2.6a) bzw. um 670 km in Nord-Süd-Richtung (Abb. 2.6b) getrennt sind. Die folgenden wesentlichen Ergebnisse lassen sich der Abb. 2.6 entnehmen:

- 1) Alle Kohärenzen sind relativ unabhängig von der Frequenz im niederfrequenten Bereich, d.h. bei Perioden über 10 Tagen. Zu höheren Frequenzen hin fallen sie mehr oder weniger abrupt ab.
- 2) Die Kohärenz im Luftdruckfeld ist stets größer als die der Schubspannungskomponenten.
- 3) Von den Schubspannungskomponenten dominiert die τ_1 -Kohärenz bei der Ost-West-Separation, dagegen die τ_2 -Kohärenz bei der Nord-Süd-Separation. Die longitudinale Korrelation ist also größer als die transversale, eine Eigenschaft, die man regelmäßig bei divergenzfreien Vektorfeldern antrifft.
- 4) Die Phasendifferenzen verschwinden im niederfrequenten Bereich, d.h. hier gibt es keine bevorzugte Ausbreitungsrichtung. Bei höheren Frequenzen ergibt sich eine Vorzugsrichtung aus Abb. 2.6a, und zwar von Westen nach Osten. In Abb. 2.6b deutet nur die Phase der τ_1 -Komponente auf gerichtete Ausbreitung von Süden nach Norden hin.

Die Ergebnisse von Abb. 2.6 lassen sich quantitativ erfassen, indem man die beobachteten Kreuzspektren mit dem Frequenz-Wellenzahlspektrum in Verbindung bringt. Gemäß (A10) in Anhang A ergibt sich etwa für das Kreuzspektrum des Luftdrucks zwischen zwei Orten, die durch die Separationsdistanz \underline{r} getrennt sind,

$$A_p(\underline{r}, \omega) = \int d\underline{k} F_p(\underline{k}, \omega) e^{-i \underline{k} \cdot \underline{r}} \quad (2.5)$$

Aus (2.5) läßt sich im Prinzip das Wellenzahlspektrum durch Inversion bestimmen. Wie schon erwähnt, ist jedoch in den Wetterkarten nicht genügend Information vorhanden, die eine aufwendige Inversion von (2.5) rechtfertigen würde. Grund da-

für ist die starke räumliche Glättung, die bei der Aufstellung der Wetterkarten angewandt wird und die im wesentlichen alle Variabilität auf Skalen unterhalb von etwa 1000 km eliminiert (R.L. JENNE, pers. Mitteilung). Das bedeutet, daß z.B. über dem Nordatlantik in Ost-West-Richtung nur etwa 5 unabhängige Datenpunkte zur Verfügung stehen. Entsprechend können aus Wetterkarten nur einige Spektralparameter bestimmt werden, welche das Spektrum bei niedrigen Wellenzahlen beschreiben.

Wir wählen als Parameter die Momente niederster Ordnung von $F_p(\underline{k}, \omega)$, nämlich

$$\bar{k}_\alpha(\omega) = \int d\underline{k} \, k_\alpha F_p(\underline{k}, \omega) / \int d\underline{k} \, F_p(\underline{k}, \omega) \quad (2.6)$$

und

$$Q_{\alpha\beta}(\omega) = \int d\underline{k} \, [k_\alpha - \bar{k}_\alpha][k_\beta - \bar{k}_\beta] F_p(\underline{k}, \omega) / \int d\underline{k} \, F_p(\underline{k}, \omega) \quad (2.7)$$

Voraussetzung für die Existenz der in (2.6) bzw. (2.7) definierten Momente ist natürlich, daß das Wellenzahlspektrum für große Werte von \underline{k} hinreichend schnell verschwindet. Für das Luftdruckspektrum wird gewöhnlich ein k^{-5} -Gesetz bei hohen Wellenzahlen angenommen; diese Voraussetzung ist damit normalerweise erfüllt.

Die Momente \bar{k}_α und $Q_{\alpha\beta}$ sind mit den lokalen Kohärenzen und Phasendifferenzen zwischen Luftdruck und geostrophischer Windgeschwindigkeit verknüpft und, wie in I gezeigt ist, aus jenen bestimmbar. Ebenfalls sind die Momente mit den in Abb. 2.6 gezeigten Kohärenzen und Phasendifferenzen des Luftdruckfeldes an verschiedenen Orten verknüpft. Dies erkennt man, indem man (2.5) in der Form

$$A_p(\underline{r}, \omega) = e^{-i\bar{\underline{k}} \cdot \underline{r}} \int d\underline{k} \, F_p(\underline{k}, \omega) e^{-i(\underline{k} - \bar{\underline{k}}) \cdot \underline{r}} \quad (2.8)$$

schreibt. Entwickelt man dann die Exponentialfunktion für

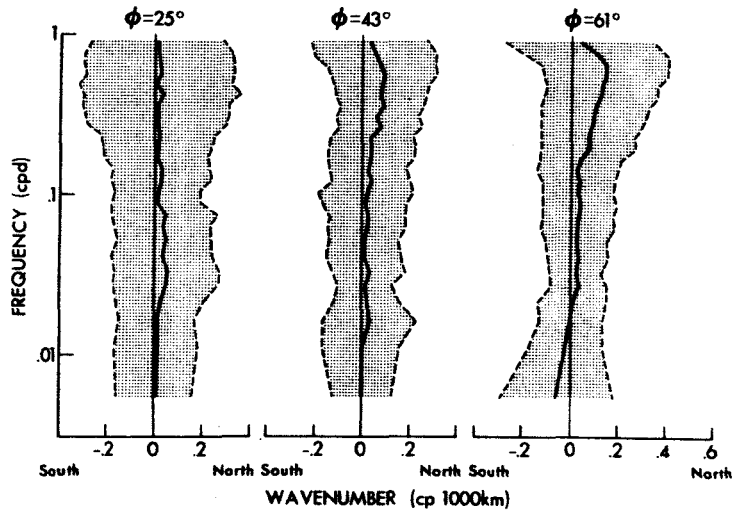
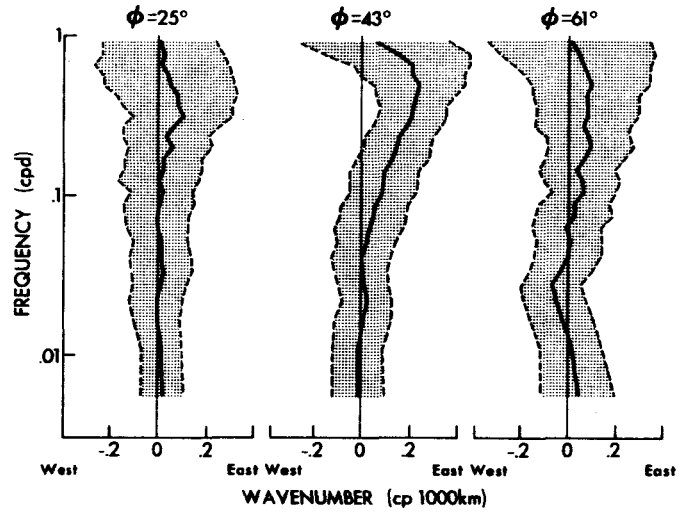


Abb. 2.7:

Mittlere Wellenzahl \bar{k}_1 (oben) bzw. \bar{k}_2 (unten) als Funktion der Frequenz (durchgezogene Linie) auf drei verschiedenen Breitenkreisen über dem Nordpazifik. Das schraffierte Gebiet ist von den Kurven $\bar{k}_\alpha \pm k_{\alpha,rms}$ begrenzt.

kleine \underline{r} bis zur zweiten Ordnung, so ergibt sich, wenn man noch gemäß (A5, A6) Kohärenz $\gamma_p(\underline{r}, \omega)$ und Phasendifferenz $\phi_p(\underline{r}, \omega)$ einführt:

$$\gamma_p(\underline{r}, \omega) e^{-i\phi_p(\underline{r}, \omega)} = e^{-i\bar{k} \cdot \underline{r}} \left[1 - \frac{1}{2} \underline{r} \cdot \underline{Q} \cdot \underline{r} \right] \quad (2.9)$$

oder

$$\gamma_p(\underline{r}, \omega) = 1 - \frac{1}{2} \underline{r} \cdot \underline{Q} \cdot \underline{r} \quad (2.10a)$$

$$\phi_p(\underline{r}, \omega) = \bar{k} \cdot \underline{r} \quad (2.10b)$$

Mittlere Wellenzahlen sowie die Größen $k_\alpha^{\text{rms}} = Q_{\alpha\alpha}^{1/2}$ sind in Abb. 2.7 in Abhängigkeit von der Frequenz dargestellt. Die Kurven sind zonale Mittel über dem Nordpazifik bei 43° N. Sie sind repräsentativ für den Bereich von etwa 30°-55° N, und nahezu identisch mit den entsprechenden Kurven für den Nordatlantik. Bei niedrigen Frequenzen ist die mittlere Wellenzahl nahezu Null, und die k_α^{rms} , die ja ein Maß für die Bandbreite des Spektrums darstellen, sind unabhängig von der Frequenz. Bei höheren Frequenzen ergibt sich, wie schon in Abb. 2.6, eine ausgeprägte Asymmetrie in der Ost-West-Richtung, und eine leichte Asymmetrie in Nord-Süd-Richtung. Näherungsweise lassen sich die Kurven in Abb. 2.7 parametrisieren durch

$$\bar{k}_\alpha = k_\alpha^* \left(1 + \left[\ln \frac{\omega}{\omega_0} / \ln \frac{\omega^*}{\omega_0} \right]^2 \right)^{-2} \quad (2.11a)$$

$$k_\alpha^{\text{rms}} = m_\alpha \left(1 + \omega / \omega_\alpha \right) \quad (2.11b)$$

mit den Konstanten $k_1^* = 0.23$, $k_2^* = 0.08$, $m_1 = 0.10$, $m_2 = 0.15$ (in Einheiten von $2\pi/(1000 \text{ km})$) sowie $\omega_0 = 0.5$, $\omega^* = 0.16$, $\omega_1 = 0.5$, $\omega_2 = 1.0$ (in $2\pi/(1d)$).

Analog zu (2.6) bzw. (2.7) lassen sich natürlich auch für die Schubspannungsspektren Momente definieren, die gemäß Abb. 2.6 keineswegs identisch mit (2.11) sein werden. Dieser Weg wird

hier nicht beschriftet. Stattdessen soll im folgenden eine direkte Beziehung zwischen Luftdruck- und Schubspannungsspektrum angegeben werden.

II.4. Modell des Spektraltensors

Trägt man die Spektren der Abb. 2.2 in einer sog. energieerhaltenden Darstellung auf, d.h. betrachtet man $\omega E(\omega)$ anstelle von $E(\omega)$, so ergibt sich, daß die Hauptbeiträge zur Gesamtvarianz der atmosphärischen Felder aus dem Periodenbereich 1-10d kommen (vgl. auch FISSEL et al, 1976). Trotzdem wollen wir uns für die folgende Diskussion der analytischen Form des Spektraltensors auf den Periodenbereich $\gtrsim 10$ d beschränken. Die Gründe dafür sind, daß

- i) die Spektren im niederfrequenten Bereich eine besonders einfache Form annehmen, und
- ii) die ozeanische Reaktion in diesem Bereich von besonderem Interesse ist.

II.4.1. Zusammenhang zwischen Druck- und Schubspannungsspektrum

Der lokale Zusammenhang zwischen τ und p ist durch die empirischen Beziehungen (2.1) und (2.3) gegeben. Grundsätzlich lassen sich damit alle statistischen Eigenschaften des Schubspannungsfeldes mit Hilfe von (2.1)-(2.3) durch diejenigen des Luftdruckfeldes ausdrücken. Wegen der Nichtlinearität von (2.1) ist dieser Zusammenhang allerdings nicht in geschlossener Form darstellbar. Wie in I gezeigt, läßt sich jedoch bei tiefen Frequenzen (2.1) approximieren durch

$$\tau = \rho_a C_D U^* u \quad (2.12)$$

mit passend gewählten Konstanten $U^* = 0(15 \text{ m/s})$ und $C_D^* = 1.5 \cdot 10^{-3}$. Gegenüber (2.1) führt das Schubspannungsgesetz (2.12) bei niedrigen Frequenzen auf identische Spektren, bei hohen Frequenzen dagegen auf steiler mit der Frequenz abfallende Spektren als (2.1).

Mit (2.12) und (2.3) ergibt sich der Zusammenhang zwischen lokalem Druck und der Schubspannung zu

$$\tau_{\alpha} = -\lambda Y_{\alpha\beta} \partial p / \partial x_{\beta} \quad (2.13)$$

mit $\lambda = c_g C_D^* u^* / f$ und

$$(Y_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} \sin \varphi_g & \cos \varphi_g \\ -\cos \varphi_g & \sin \varphi_g \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

Damit folgt der Zusammenhang zwischen den Spektralmomenten beider Felder zu

$$F_{\tau_{\alpha}\tau_{\beta}}(\underline{k}, \omega) = \lambda^2 Y_{\alpha\mu} Y_{\beta\nu} k_{\mu} k_{\nu} F_p(\underline{k}, \omega) \quad (2.15)$$

oder ausführlich

$$\begin{aligned} F_{\tau_1} &= \frac{\lambda^2}{2} \left[k^2 + (k_2^2 - k_1^2) \cos 2\varphi_g + 2k_1 k_2 \sin 2\varphi_g \right] F_p \\ F_{\tau_2} &= \frac{\lambda^2}{2} \left[k^2 - (k_2^2 - k_1^2) \cos 2\varphi_g - 2k_1 k_2 \sin 2\varphi_g \right] F_p \\ F_{\tau_1 \tau_2} &= \frac{\lambda^2}{2} \left[-2k_1 k_2 \cos 2\varphi_g + (k_2^2 - k_1^2) \sin 2\varphi_g \right] F_p \\ F_{\tau_2 \tau_1} &= F_{\tau_1 \tau_2} \end{aligned} \quad (2.16)$$

Das Spektrum der Rotation ergibt sich zu

$$F_{\nabla \times \underline{\tau}}(\underline{k}, \omega) = \lambda^2 \cos^2 \varphi_g k^4 F_p(\underline{k}, \omega) \quad (2.17)$$

während das Divergenzspektrum durch

$$F_{\nabla \cdot \underline{\tau}}(\underline{k}, \omega) = \lambda^2 \sin^2 \varphi_g k^4 F_p(\underline{k}, \omega) \quad (2.18)$$

gegeben ist. Mit $\varphi_g = 15^\circ$ ist das letztere um mehr als eine Größenordnung kleiner als das Rotationsspektrum.

Es wird sich später als zweckmäßig erweisen, zusätzlich bzw. anstelle der Schubspannungskomponenten τ_1, τ_2 die Komponenten τ'_1, τ'_2 in einem um den Winkel ϕ_g math. positiv gedrehten Koordinatensystem zu betrachten, ohne allerdings gleichzeitig die Basis für den Wellenzahlvektor zu drehen. Für die neuen Komponenten hat der Spektraltensor die algebraisch einfachere Form

$$F_{\tau'_2, \tau'_1}(\underline{k}, \omega) = \lambda^2 [k^2 \delta_{\alpha\beta} - k_\alpha k_\beta] F_p(\underline{k}, \omega) \quad (2.19)$$

Es ist aber zu beachten, daß (2.19) keinen im üblichen Sinne durch sein Transformationsverhalten definierten Tensor darstellt, weil sich jetzt die Komponenten von \underline{k} auf ein anderes Koordinatensystem beziehen als die von \underline{r} . Für die Betrachtung von Invarianzeigenschaften wie Symmetrie oder Isotropie muß daher in jedem Fall (2.16) benutzt werden.

II.4.2. Invarianzeigenschaften

In Übereinstimmung mit den Definitionen von BATCHELOR (1953), jedoch modifiziert für zweidimensionale Felder, bezeichnen wir die atmosphärischen Felder als symmetrisch hinsichtlich einer gewissen horizontalen Richtung, wenn ihre statistischen Eigenschaften invariant gegenüber Spiegelungen an einer Ebene normal zu dieser Richtung sind. Als isotrop bezeichnen wir sie, wenn Spiegelsymmetrie hinsichtlich jeder beliebigen Richtung sowie Invarianz gegenüber Drehungen um eine vertikale Achse besteht. Diese Invarianzeigenschaften haben gewisse Konsequenzen für die Gestalt des Spektraltensors, die mit einer von ROBERTSON (1940) angegebenen Methode bestimmt werden können. Für das Luftdruckfeld als Skalar impliziert z.B. Symmetrie hinsichtlich der Nord-Süd-Richtung, daß $F_p(\underline{k}, \omega)$ eine gerade Funktion von k_2 ist. Symmetrie hinsichtlich einer beliebigen Richtung impliziert

$$F_p(\underline{k}, \omega) = F_p(-\underline{k}, \omega) \quad (2.20)$$

Isotropie ist gegeben, wenn F_p nur vom Betrag der Wellenzahl abhängt, woraus dann natürlich (2.20) folgt. Für die Schubspannung als Vektorfeld gelten Invarianzeigenschaften für jedes aus dem Spektraltensor gebildete Skalar. Wählen wir als dieses Skalar z.B. $k_\alpha k_\beta F_{\tau_\alpha \tau_\beta}$, so ergibt sich, daß bei Symmetrie $F_{\tau_\alpha \tau_\beta}$ für $\alpha = \beta$ eine gerade und für $\alpha \neq \beta$ eine ungerade Funktion der Wellenzahl sein muß. Für Isotropie ergibt sich die allgemeine Darstellung

$$F_{\tau_\alpha \tau_\beta}(\underline{k}, \omega) = g(k, \omega) k^2 \delta_{\alpha\beta} + h(k, \omega) k_\alpha k_\beta \quad (2.21)$$

mit beliebigen Funktionen g und h , welche nur vom Betrag der Wellenzahl abhängen.

Ein Vergleich mit (2.16) zeigt nun, daß (außer für $\phi_g = 0$ oder $\phi_g = 90^\circ$) das Schubspannungsfeld weder symmetrisch noch isotrop sein kann, auch wenn das Druckfeld die entsprechende Eigenschaft hat. Der Grund dafür ist natürlich die Tatsache, daß die Beziehung (2.13) außer für $\phi_g = 90^\circ$ nicht spiegelinvariant ist. Für $\phi_g = 0$ besteht Invarianz bis auf das Vorzeichen, welches sich beim Übergang zur Spektraldarstellung weghebt.

Es bleibt noch zu bemerken, daß bei der Darstellung (2.19) diese Schwierigkeiten formal nicht auftreten. Wir werden später daher meist (2.19) anstelle von (2.16) verwenden und die Schubspannung als pseudosymmetrisch bzw. pseudoisotrop bezeichnen, falls die jeweilige Invarianz beim Druckfeld besteht.

II.4.3. Analytische Darstellung

Ein Versuch, die verschiedenen atmosphärischen Beobachtungen zu einem Modellspektrum für Luftdruck und Schubspannung zu kondensieren, wurde von FRANKIGNOUL & MÜLLER (1979a) vorgenommen. In der Schreibweise der vorliegenden Arbeit lautet deren Ansatz

$$F_p(\underline{k}, \omega) = E_p^\circ S(k) / 2\pi k \quad (2.22)$$

$$F_{\tau_\alpha \tau_\beta}(\underline{k}, \omega) = E_\tau^\circ (k^2/k_0^2) S(k) / 2\pi k \cdot \left[\delta_{\alpha\beta} - k_\alpha k_\beta / k^2 \right]$$

mit

$$S(k) = \begin{cases} 3/4 k_b & , 0 < k < k_b \\ 3k_b^3/4k^4 & , k_b < k < k_c \\ 0 & , k > k_c \end{cases} \quad (2.23)$$

Dabei sind die Konstanten gegeben als $E_p^\circ \approx 4.6 \cdot 10^2 (\text{mb})^2 / \text{cpd}$, $E_\tau^\circ \approx 1.1 \cdot 10^1 \text{ dyn/cm}^2$ und $k_b = 2\pi/5000 \text{ km}^{-1}$. Die maximale Wellenzahl k_c bleibt unspezifiziert mit der Größenordnung $k_c = O(2\pi/100) \text{ km}^{-1}$, d.h. $k_c \gg k_b$. Wir wollen nun untersuchen, bis zu welchem Grade das durch (2.22-23) gegebene symmetrische und isotrope Modellspektrum mit den oben diskutierten Beobachtungsergebnissen kompatibel ist.

1) Frequenzspektrum. Durch Integration von (2.22) über alle Wellenzahlen erhält man $E_p(\omega) = E_p^\circ [1 + O(k_b/k_c)^3]$ und $E_{\tau_1}(\omega) = E_{\tau_2}(\omega) = \frac{1}{2} E_\tau^\circ [1 + O(k_b/k_c)]$, also weiße Frequenzspektren. Dies entspricht (für Perioden oberhalb von 10 Tagen) den Ergebnissen von Abb. 2.2, mit Ausnahme natürlich des jährlichen Signals, welches wegen seiner festen Phase nicht ohne weiteres statistisch behandelt werden kann. Die absolute Höhe der Spektren in Abb. 2.2 ist um etwa einen Faktor 3 höher, was daran liegt, daß das Wetterschiff C in einem Gebiet sehr hoher Varianz liegt (vgl. Abb. 2.1).

2) Relation Druck-Schubspannung. Die Modellspektren (2.22) erfüllen nicht die Beziehung (2.16), wohl dagegen (2.19), wenn man $\lambda^2/2$ mit $E_\tau^\circ/E_p^\circ k_b^2$ identifiziert, was einem Wert $U^* = 16 \text{ m/s}$ entspricht. Die Diskrepanz zwischen (2.16) und (2.19) ist unwesentlich, solange man nur die Schubspannungsrotation betrachtet. Gemäß (2.17) ergibt sich hier lediglich ein unterschiedlicher Faktor $\cos^2 \phi_g \approx 0.93$. Bei der Betrachtung von Korrelationen zwischen ozeanischen und atmosphärischen Variablen (vgl. Kap. IV.7) wird dieser Unterschied jedoch eine Rolle spielen.

3) Symmetrie und Isotropie. Aus (2.11) bzw. Abb. 2.7 ergibt sich, daß für Perioden $> 10 \text{ d}$ stets $|\bar{k}_\alpha| \ll k_\alpha^{\text{rms}}$ ist, d.h. das Moment 1. Ordnung weist nicht auf Unsymmetrie hin. Dagegen ergibt sich aus (2.11) eine deutliche Anisotropie, da $k_2^{\text{rms}} \approx 1.5 k_1^{\text{rms}}$ ist. Ebenso zeigt sich dies in Abb. 2.2, wo $E_{\tau_1}(0) \approx 2E_{\tau_2}(0)$ ist.

4) Wellenzahlskalen. Mit (2.22) sowie der Definition (2.7) ergibt sich eine rms-Wellenzahl

$$\overline{k^2}^{1/2} = (Q_{\alpha\alpha})^{1/2} = k_b \left[1 + o\left(\frac{k_b}{k_c}\right) \right] \quad (2.4)$$

d.h. $\overline{k^2}^{1/2} \approx 2\pi/5000 \text{ km}^{-1}$. Dies stimmt recht genau mit dem Wert $(m_1^2 + m_2^2)^{1/2} \approx 2\pi/5500 \text{ km}^{-1}$ überein, der sich aus der an die Beobachtungen angepaßten Gleichung (2.11b) ergibt.

Insgesamt steht also das Modellspektrum (2.22) in guter Übereinstimmung mit den in Kap. II.3 diskutierten Beobachtungen, mit gewissen Einschränkungen hinsichtlich der Isotropie sowie der Struktur des Schubspannungstensors. Zwei Aspekte der Darstellung (2.22-23) sind bislang allerdings nicht getestet worden, nämlich die Form $S(k)$ des Spektrums (insbesondere das k^{-5} -Gesetz bei großen Wellenzahlen) sowie der Wert der maximalen Wellenzahl k_c . Während die spektrale Form konsistent mit verschiedenen atmosphärischen Messungen ist, auf die bei FRANKIGNOUL & MÜLLER (1979a) im einzelnen verwiesen wird, sind die meisten beobachtbaren Eigenschaften der Spektren unempfindlich gegen die Wahl von k_c . Eine grobe Abschätzung von k_c läßt sich allerdings aus den verschiedenen Kohärenzen von Druck (γ_p) und Schubspannung (γ_τ) von Abb. 2.6 versuchen. Ignoriert man den Vektorcharakter der beteiligten Größen, so ergibt sich mit (2.10a) und (2.22)

$$\begin{aligned} \gamma_p &\approx 1 - \frac{1}{2} \overline{k^2} \tau^2 \\ \gamma_\tau &\approx 1 - \frac{1}{2} \overline{k^4} \tau^2 / \overline{k^2} \end{aligned} \quad (2.25)$$

oder

$$\frac{\overline{k^4}}{\overline{k^2} \overline{k_b^2}} = \frac{1 - \gamma_\tau}{1 - \gamma_p} \quad (2.26)$$

Nun war ja $\overline{k^2} \approx k_b^2$, während der Abschneideradius k_c in das Moment 4. Ordnung eingeht:

$$\overline{k^4} = \frac{3}{4} [k_b^4 / 5 + k_b^3 k_c] \approx \frac{3}{4} k_b^3 k_c \quad (2.27)$$

Mit $\gamma_p \sim 0.9$ und $\gamma_\tau \sim 0.6$ folgt dann

$$k_c \approx \frac{4}{3} \frac{1 - \delta_\tau}{1 - \delta_p} k_b \approx \frac{2\pi}{940 \text{ km}} \quad (2.28)$$

Dieser Wert ist sehr klein und liegt um mehr als eine Größenordnung unter dem von FRANKIGNOUL & MÜLLER (1979a) angegebenen. Wegen des oben bereits angesprochenen Problems der Glättung der NMC-Wetterkarten, durch die Skalen unterhalb von etwa 1000 km ausgefiltert werden, kann man jedoch aus diesen Daten prinzipiell keine höhere Wellenzahl erwarten. Es ist deshalb wahrscheinlich, daß der durch (2.28) gegebene Wert mehr über das bei der Erstellung der Wetterkarten benutzte Analyseverfahren aussagt als über tatsächliche Eigenschaften des Windspektrums.

Ob die durch (2.22) gegebene Darstellung wirklich bis hinunter zu Skalen $O(100)$ km gültig bleibt, ist eine offene Frage, die letztlich nur durch direkte Messungen in diesem Skalenbereich gelöst werden kann. Die Antwort auf diese Frage ist äußerst wichtig für das Problem der meteorologischen Erzeugung barokliner Wellen bzw. Wirbel im Ozean. Für die Erzeugung barotroper Strömungsschwankungen, die im folgenden untersucht wird, ist diese Frage jedoch von geringerem Interesse. Wir werden daher, soweit im folgenden analytische Spektren der atmosphärischen Variablen benötigt werden, die Form (2.22) mit $k_c = 2\pi/500 \text{ km}^{-1}$ verwenden. Nahezu alle Aspekte der barotropen ozeanischen Reaktion sind damit unabhängig von der genauen Wahl von k_c .

III. BEWEGUNGSGLEICHUNGEN GROSSRÄUMIGER STRÖMUNGEN

III.1. Allgemeines

Ausgangspunkt der Betrachtungen sind die Erhaltungsgleichungen für Impuls, Masse, Wärme und Salzgehalt auf der rotierenden Erde sowie eine thermodynamische Zustandsgleichung (s. z.B. KRAUSS, 1973). Zur Vereinfachung werden durchgängig folgende Näherungen benutzt:

- a) Hydrostatisches Gleichgewicht zwischen Druck- und Dichtefeld
- b) Vernachlässigung der geringen Dichteänderungen im Ozean
in den Horizontalkomponenten der Navier-Stokes-Gleichung und
in der Kontinuitätsgleichung (Boussinesq-Approximation)
- c) Vernachlässigung der lokal horizontalen Komponente des
Vektors der Erdrotation
- d) Parametrisierung der turbulenten Reibung bzw. Diffusion
durch Austauschansatz.

Die Annahmen a)-c) sind traditionell in der Ozeanographie verwendete Approximationen, deren Gültigkeitsbereich hier nicht diskutiert werden soll; s. z.B. ECKART (1960) oder PHILLIPS (1966) für ausführlichere Darstellungen. Dagegen ist d) eine zwar ebenfalls häufig verwendete, jedoch weniger befriedigende Näherung. Insbesondere ist die Größenordnung der bei der Parametrisierung auftretenden Koeffizienten nur unzureichend bekannt. In der Regel ist jedoch im Innern des Ozeans der Reibungseinfluß auf langperiodische Strömungsschwankungen gering, und einige wichtige Aspekte des hier untersuchten Problemkreises sind nahezu unabhängig von der genauen Wahl dieser Koeffizienten.

Im folgenden wird zunächst gezeigt, daß in dem hier interessierenden Bereich von Raum- und Zeitskalen die Vertikalskala der atmosphärisch induzierten Strömungsschwankungen so groß ist, daß die Benutzung der vertikal integrierten Bewegungsgleichungen erlaubt ist. Anschließend werden diese Bewegungsgleichungen aufgestellt und durch Skalierung in eine dimensionslose, den hier betrachteten Prozessen besonders ange-

paßte Form gebracht. Schließlich wird durch eine Störungs-entwicklung die sog. quasigeostrophische Form der Bewegungsgleichungen erhalten, welche die Grundlage der weiteren analytischen Rechnungen ist.

III.2. Die vertikale Eindringtiefe

Für das folgende qualitative Argument wollen wir voraussetzen, daß zusätzlich zu den bereits erwähnten Annahmen gilt:

- i) Die Bewegungsgleichungen sind linear
- ii) Die Reibung wird außerhalb einer oberflächennahen Grenzschicht vernachlässigt
- iii) Die Horizontalskala der Bewegung ist klein gegenüber dem Erdradius, so daß eine geometrische Approximation der Kugeloberfläche durch die β -Ebene möglich ist.
- iv) Die atmosphärische Anregung ist $\sim \exp(i[k \cdot x - \omega t])$

Unter diesen Voraussetzungen werden die Bewegungsgleichungen separabel, und für die Amplitude $W(z)$ der Vertikalgeschwindigkeit ergibt sich im reibungsfreien Inneren des Ozeans die Differenzialgleichung

$$\frac{d^2 W}{dz^2} - \left(k^2 + \beta k_1 / \omega \right) \frac{N^2(z)}{f^2 - \omega^2} W = 0 \quad (3.1)$$

(s. z.B. MAGAARD, 1977).

Dabei ist $N(z)$ die lokale Brunt-Väisälä-Frequenz, und $\beta = \partial f / \partial x_2$ die Nord-Süd-Änderung des Coriolisparameters. Eine typische ozeanische Schichtung in mittleren Breiten wird etwa beschrieben durch

$$N(z) = N_0 e^{z/b} \quad (3.2)$$

(GARRETT & MUNK, 1972) mit $N_0 = 7.3 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ und $b = 1.3 \text{ km}$.

Beschränken wir uns auf $\omega < f$, so ergibt sich folgende Situation: Solange $k^2 + \beta k_1 / \omega > 0$ ist, beschreibt (3.1) eine von der Oberfläche in das Innere des Ozeans abklingende Bewegung.

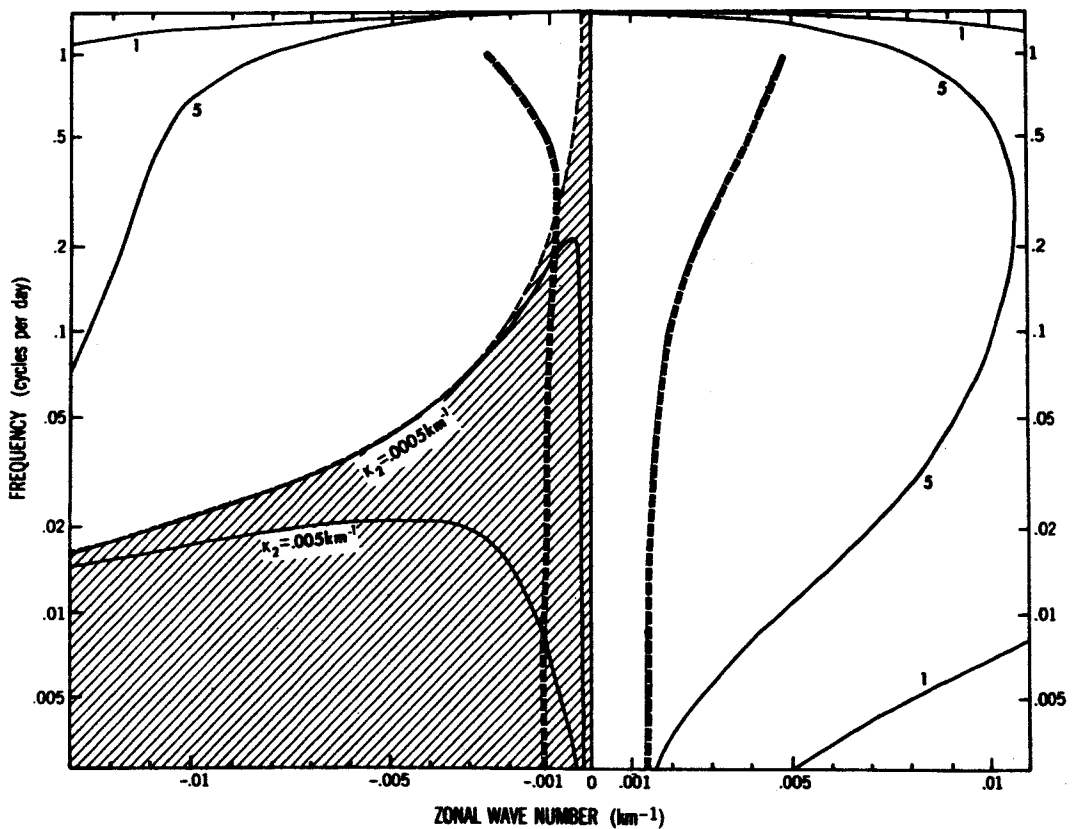


Abb. 3.1:

Frequenz-Wellenzahl-Diagramm zur Bestimmung der Eindringtiefe von Strömungsschwankungen. Die im unschraffierten Gebiet durchgezogenen Kurven bezeichnen (für $k_2 = 0$) die Frequenz-Wellenzahl-Kombination, für die $h_e = 1$ km bzw. 5 km ist. Die dick gestrichelten Kurven sind $k_1 \pm 2k_1^{\text{rms}}$ aus (2.11); sie schließen den Bereich vorwiegender atmosphärischer Anregung ein.

Zur näherungsweisen Bestimmung der Eindringtiefe benutzen wir die WKB-Lösung von (3.1),

$$W(z) \approx W(0) \left[\frac{N(0)}{N(z)} \right]^{1/2} \exp \left(- \int_z^0 q(z') dz' \right) \quad (3.3)$$

mit $q(z) = N(z) (k^2 + \beta k_1 / \omega)^{1/2} (f^2 - \omega^2)^{-1/2}$

Die exakte Lösung von (3.1) läßt sich mit Hilfe von Besselfunktionen darstellen, bringt jedoch gegenüber (3.3) keine qualitativ neuen Gesichtspunkte. Wir definieren nun die effektive Eindringtiefe $z = -h_e$ gemäß

$$\int_{-h_e}^0 q(z) dz = 1 \quad (3.4)$$

Damit ergibt sich

$$\frac{|k^2 + \beta k_1 / \omega|^{1/2} N_0 b}{(f^2 - \omega^2)^{1/2}} = \left(1 - e^{-h_e/b} \right)^{-1} \quad (3.5)$$

Für $k_2 = 0$ sind die Kombinationen von ω und k_1 , für die gemäß (3.5) $h_e = 1$ km bzw. $h_e = 5$ km ist, in Abb. 3.1 eingezeichnet.

Eine etwas verschiedene Situation ergibt sich für $k^2 + \beta k_1 / \omega < 0$. Dies entspricht für $k_2 = 0$ dem schraffierten Bereich in Abb. 3.1, für $k_2 = .0005 \text{ km}^{-1}$ bzw. $k_2 = .005 \text{ km}^{-1}$ dem unterhalb der entsprechenden Kurve liegenden Teil des schraffierten Bereichs. Für nicht zu kleine $|q(z)|$ läßt sich erneut eine WKB-Näherung aufstellen, die jedoch im Gegensatz zu (3.3) oszillierenden Charakter hat und nicht auf einen bestimmten Tiefenbereich beschränkt ist. In Analogie zu (3.4) kann man eine vertikale Skala (Wellenlänge) definieren, für die eine zu (3.5) analoge Beziehung gilt. Diese Skala ist, wie man aus (3.5) entnehmen kann, bei gleichem ω und $|k_1|$ stets größer als die Eindringtiefe für $k_1 > 0$.

Ein Vergleich mit den in Kap. II.3 bestimmten Parametern der atmosphärischen Anregungsfunktion, d.h. mittlerer Wellenzahl $\overline{k_1}(\omega)$ und Bandbreite $Q_{11}^{1/2}(\omega)$, die beide ebenfalls in Abb. 3.1 eingetragen sind, ergibt nun folgendes: Im Periodenbereich von

1 d bis ~ 300 d konzentriert sich die atmosphärische Anregungsfunktion auf einen Bereich der ω - k_1 -Ebene, in dem die (lineare) ozeanische Reaktion auf atmosphärische Störungen annähernd barotrop ist, d.h. die gesamte Wassersäule erfaßt. Nur bei sehr langen Perioden, oder bei atmosphärischer Anregung mit Wellenzahlen $O(100 \text{ km})^{-1}$ ist eine starke barokline Reaktion möglich, entweder (für $k^2 + \beta k_1/\omega > 0$) in Form einer zur Oberfläche hin konzentrierten Strömungsanomalie, oder aber in Form resonant erzeugter interner planetarischer Wellen. Da, wie in Kap. II.4 dargelegt, der kleinskalige Anteil der meteorologischen Felder nur sehr ungenau bekannt ist, beschränken wir uns hier auf die Untersuchung großräumiger Variabilität. Beschränken wir uns weiterhin auf Perioden unterhalb etwa eines halben Jahres, dann ist es eine gute Näherung (und gleichzeitig eine wesentliche Vereinfachung des Problems), nur den barotropen Teil der Strömungen zu betrachten. Dazu können die Bewegungsgleichungen in ihrer vertikal integrierten Form herangezogen werden, und Dichteunterschiede können vollständig vernachlässigt werden. Es ist noch zu bemerken, daß diese Aussage unabhängig von dem physikalischen Mechanismus ist, welcher die Strömung hervorruft. Neben Windschubspannung und Luftdruck kann ja auch ein variabler Auftriebsfluß eine Vertikalgeschwindigkeit an der Unterkante der ozeanischen Deckschicht erzeugen (MAGAARD, 1977). Die Eindringtiefe hängt jedoch nur von der Skala des so erzeugten Geschwindigkeitsfeldes ab, nicht vom physikalischen Ursprung.

III.3. Bewegungsgleichungen für den Massentransport

Wir gehen aus von den vertikal integrierten Erhaltungsgleichungen für Impuls und Masse, die in Kugelkoordinaten die folgende Form annehmen (WILLEBRAND et al, 1980)

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_1}{\partial t} + L_A M_1 - \frac{M_1 M_2 \tan \theta}{a h} - f M_2 + \frac{h}{a \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \lambda} (g \zeta + \frac{p}{\rho_0}) \\ = \frac{E_1}{\rho_0} + A \left[L_D M_1 - 2 \frac{\sin \theta}{a^2 \cos^2 \theta} h \frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{M_2}{h} \right] - B M_1 \end{aligned} \quad (3.6a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_2}{\partial t} + L_A M_2 + \frac{M_1^2 \tan \theta}{a h} + f M_1 + \frac{h}{a} \frac{\partial}{\partial \theta} (g \zeta + p/\rho_0) \\ = \frac{\tau_1}{\rho_0} + A \left[L_D M_2 + \frac{2 \sin \theta}{a^2 \cos^2 \theta} h \frac{\partial}{\partial \lambda} (M_1/h) \right] - B M_2 \end{aligned} \quad (3.6b)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{1}{a \cos \theta} \left[\frac{\partial M_1}{\partial \lambda} + \frac{\partial}{\partial \theta} (M_2 \cos \theta) \right] = 0 \quad (3.6c)$$

Dabei bedeuten M_1 , M_2 die Ost- bzw. Nordkomponente des horizontalen Volumentransportes, ζ die Auslenkung der Meeresoberfläche aus dem Gleichgewichtszustand, θ und λ geographische Breite bzw. Länge, a Erdradius, $h = H_0 + \zeta - h_B$ die Tiefe der gesamten Wassersäule, $h_B(\lambda, \theta)$ das Bodenprofil, $f = 2\Omega \sin \theta$ Coriolisparameter, A horizontaler Austauschkoeffizient, B Bodenreibungskoeffizient, p Luftdruck und τ_1 , τ_2 die Ost- bzw. Nordkomponente der kinematischen Schubspannung an der Meeresoberfläche. Die Operatoren L_A (Advektion) und L_D (Dissipation) sind definiert durch

$$L_A = \frac{1}{a \cos \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{M_1}{h} + \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{M_2 \cos \theta}{h} \right] \quad (3.7a)$$

$$L_D = \frac{1}{a^2} \left[\frac{h}{\cos^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \frac{1}{h} + \frac{h}{\cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{h} + (1 - \tan^2 \theta) \right] \quad (3.7b)$$

Es ist zweckmäßig, die Oberflächenauslenkung ζ um den direkten Luftdruckeinfluß zu reduzieren, d.h. statt ζ die Variable

$$\eta = \zeta + p/g\rho_0 \quad (3.8)$$

einzuführen. Die reduzierte Auslenkung η kann mit einem Bodendruckmesser gemessen werden, falls barokline Druckschwankungen hinreichend klein sind.

Das Gleichungssystem (3.6) ist in dieser Form unmittelbar für die Anwendung numerischer Methoden geeignet (vgl. Kap.V).

Für die folgenden analytischen Betrachtungen sind jedoch weitgehende Vereinfachungen erforderlich, die sich die Größenordnungen der hier untersuchten Strömungsvorgänge zunutze machen.

Zunächst führen wir an Stelle von λ und θ neue Koordinaten mit der Dimension einer Länge ein:

$$\begin{aligned} x_1 &= \lambda a \cos \theta_0 \\ x_2 &= a (\theta - \theta_0) \end{aligned} \quad (3.9)$$

Dabei ist θ_0 eine Referenzbreite, die wir zu 40° festsetzen. Weiterhin führen wir ein anderes Maßsystem ein, in dem der Volumentransport in Einheiten von $U_0 H_0$, horizontale Längen in L_0 , Zeiten in T_0 , das Bodenprofil in Δ_0 , die Schubspannung in τ_0 , Luftdruck in P_0 sowie reduzierte Oberflächenauslenkung in Z_0 gemessen wird. Dabei wollen wir die folgenden für den Ozean typischen Größenordnungen zugrunde legen:

$$U_0 \sim 10 \text{ cm/s}, H_0 \sim 5 \text{ km}, \Delta_0 \sim 1 \text{ km}, L_0 \sim 500 \text{ km}, T_0 \sim 5 \text{ d}, \\ \tau_0 \sim 1 \text{ dyn/cm}^2, P_0 \sim 10 \text{ mb}$$

Z_0 bleibt zunächst unbestimmt, wir erwarten jedoch $Z_0 \lesssim 1 \text{ m}$. Ferner wird die Größenordnung der Reibungskoeffizienten zunächst zu $A_H \sim 10^8 \text{ cm}^2/\text{s}$ und $B \sim (100 \text{ d})^{-1} \sim 10^{-7} \text{ s}^{-1}$ angenommen. In den neuen dimensionslosen Einheiten nehmen (3.6) bzw. (3.7) die folgende Form an:

$$\epsilon_1 \frac{\partial M_1}{\partial t} + \epsilon_2 L_A M_1 - \epsilon_2 \epsilon_3 \frac{M_1 M_2}{h} \tan \theta - \frac{\sin \theta}{\sin \theta_0} M_2 + \delta \frac{\cos \theta}{\cos \theta_0} h \frac{\partial \eta}{\partial x_1} = \quad (3.10a)$$

$$= \epsilon_9 \tau_1 + \epsilon_6 \left[L_B M_1 - 2 \epsilon_3 \frac{\sin \theta \cos \theta_0}{\cos^2 \theta} h \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{M_2}{h} \right] - \epsilon_7 M_1$$

$$\epsilon_1 \frac{\partial M_2}{\partial t} + \epsilon_2 L_A M_2 + \epsilon_2 \epsilon_3 \frac{M_1^2}{h} \tan \theta + \frac{\sin \theta}{\sin \theta_0} M_1 + \delta h \frac{\partial \eta}{\partial x_2} = \quad (3.10b)$$

$$= \epsilon_9 \tau_2 + \epsilon_6 \left[L_B M_2 + 2 \epsilon_3 \frac{\sin \theta \cos \theta_0}{\cos^2 \theta} h \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{M_1}{h} \right] - \epsilon_7 M_2$$

$$\epsilon_1 \epsilon_4 \frac{\partial \eta}{\partial t} + \epsilon_2 \left[\frac{\cos \theta_0}{\cos \theta} \frac{\partial M_1}{\partial x_1} + \frac{\partial M_2}{\partial x_2} - \epsilon_3 M_2 \tan \theta \right] = \epsilon_1 \epsilon_8 \frac{\partial p}{\partial t} \quad (3.10c)$$

Parameter	Definition	Größenordnung	Bedeutung
ϵ_1	$(f_0 T_0)^{-1}$	$2 \cdot 10^{-2}$	Zeitliche Änderung
ϵ_2	$U_0 (f_0 L_0)^{-1}$	$2 \cdot 10^{-3}$	Nichtlinearität (Rossby-Zahl)
ϵ_3	L_0/a	10^{-1}	Abweichung von kartesischer Geometrie
ϵ_4	Z_0/H_0	$< 10^{-4}$	Freie Oberfläche
ϵ_5	Δ_0/H_0	$2 \cdot 10^{-1}$	Bodentopographie
ϵ_6	$A(f_0 L_0^2)^{-1}$	$4 \cdot 10^{-4}$	Horizontale Reibung (Ekman-Zahl)
ϵ_7	B/f_0	10^{-3}	Bodenreibung
ϵ_8	$P_0(\rho_0 g H_0)^{-1}$	$2 \cdot 10^{-5}$	Luftdruck
ϵ_9	$\tau_0(\rho_0 f_0 U_0 H_0)^{-1}$	$2 \cdot 10^{-3}$	Windschubspannung
δ	$g Z_0 / (f_0 L_0 U_0)$	2	Druckgradient

Tabelle 3.1:

Definition, Größenordnung und physikalische Bedeutung der in (3.10) eingeführten Parameter ϵ_i und δ .

mit

$$L_A = \frac{\cos \theta_0}{\cos \theta} \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{M_1}{h} + \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{M_2}{h} - \epsilon_3 \frac{M_2}{h} \tan \theta \quad (3.11a)$$

$$L_B = h \frac{\cos^2 \theta_0}{\cos^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \frac{1}{h} + h \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \frac{1}{h} - \epsilon_3 \tan \theta + \epsilon_3^2 [1 - \tan^2 \theta] \quad (3.11b)$$

Dabei ist $\theta = \theta_0 + \epsilon_3 x_2$ und $h = 1 + \epsilon_4 \eta - \epsilon_5 h_B - \epsilon_8 p$. Die dimensionslosen Parameter ϵ_i sind in Tab. 3.1 erläutert.

III.4. Quasigeostrophische Approximation

Bislang sind noch keine Vernachlässigungen gemacht worden, d.h. das System (3.10, 3.11) ist zu (3.6, 3.7) äquivalent. Die Größenordnung der ϵ_i legt nun aber eine Störungsentwicklung nach einigen oder allen der ϵ_i nahe, um auf diese Weise zu einem einfacher behandelbaren System zu kommen. Eine solche Störungsentwicklung kann auf verschiedene Weise durchgeführt werden. Eine Möglichkeit wäre, die gesuchten Funktionen $(M_1, M_2, \eta) = \chi$ nach allen ϵ_i einzeln zu entwickeln,

$$\chi(\underline{x}, t) = \sum_{m_1, m_2, \dots, m_9} \chi^{(m_1 \dots m_9)}(\underline{x}, t) \quad (3.12)$$

mit $\chi^{(m_1 \dots m_9)}(\underline{x}, t) = O(\epsilon_1^{m_1} \dots \epsilon_9^{m_9})$. Diese Möglichkeit scheidet jedoch als sehr unpraktisch aus, da zur Konstruktion einer vernünftigen Näherung in (3.12) eine große Anzahl von Termen aufzusummieren wäre. Wir wählen stattdessen eine Entwicklung der Form

$$\chi(\underline{x}, t) = \sum_m \chi^{(m)}(\underline{x}, t) \quad (3.13)$$

mit $\chi^{(m)}(\underline{x}, t) = O(\epsilon^m)$, wobei wir ungeachtet der verschiedenen Größenordnung der ϵ_i für alle i $\epsilon_i = O(\epsilon) \ll 1$ annehmen. Diese Entwicklung hat den Vorteil, daß bereits in der niedrigsten nichttrivialen Ordnung alle der in Tabelle 3.1 angegebenen Prozesse vertreten sind. Als Nachteil muß man allerdings in

Kauf nehmen, daß (bei fester Störungsordnung) die Approximation der verschiedenen Prozesse verschieden gut ist, z.B. werden geometrische Effekte (ϵ_3, ϵ_5) schlechter approximiert als etwa der Luftdruckeinfluß.

Die niedrigste Ordnung der Gleichungen (3.10) lautet

$$- M_2^{(0)} + \oint \frac{\partial \eta^{(0)}}{\partial x_1} = 0 \quad (3.14a)$$

$$M_1^{(0)} + \oint \frac{\partial \eta^{(0)}}{\partial x_2} = 0 \quad (3.14b)$$

$$\frac{\partial M_1^{(0)}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_2^{(0)}}{\partial x_2} = 0 \quad (3.14c)$$

Gleichungen (3.14a,b) beschreiben das geostrophische Gleichgewicht zwischen Massentransport und reduzierter Oberflächenaußenlenkung als niedrigste Ordnung in der Impulsbilanz. Der Bequemlichkeit halber wollen wir noch Z_0 so wählen, daß $\delta = 1$ wird. Diese Skalierung ist mit den obigen Abschätzungen konsistent. Die niedrigste Ordnung der Kontinuitätsgleichung enthält keine neue Information, sie folgt bereits aus (3.14a,b).

Wir führen noch die Bezeichnung $\Psi(x,t) \equiv \eta^{(0)}(x,t)$ ein und identifizieren Ψ gemäß (3.14a,b) als Transport-Stromfunktion. Diese Interpretation ist natürlich nur in niedrigster Ordnung gültig, da ja x_1, x_2 nicht streng kartesische Koordinaten sind.

Die nächsthöhere Ordnung lautet nun:

$$\begin{aligned} \epsilon_1 \frac{\partial M_1^{(0)}}{\partial t} + \epsilon_2 \left(\frac{\partial M_1^{(0)2}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_1^{(0)} M_2^{(0)}}{\partial x_2} \right) - M_2^{(1)} - \epsilon_3 x_2 M_2^{(0)} \cot \theta_0 \\ + \frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial x_1} + \epsilon_3 x_2 \tan \theta_0 \frac{\partial \eta^{(0)}}{\partial x_1} + (\epsilon_4 \eta^{(0)} - \epsilon_2 p - \epsilon_5 h_B) \frac{\partial \eta^{(0)}}{\partial x_1} = \\ = \epsilon_4 \tau_1 + \epsilon_6 \left(\frac{\partial^2 M_1^{(0)}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 M_1^{(0)}}{\partial x_2^2} \right) - \epsilon_7 M_1^{(0)} \end{aligned} \quad (3.15a)$$

$$\begin{aligned}
 & \epsilon_1 \frac{\partial M_2^{(0)}}{\partial t} + \epsilon_2 \left(\frac{\partial M_1^{(0)} M_2^{(0)}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_2^{(0)2}}{\partial x_2} \right) + M_1^{(1)} + \epsilon_3 x_2 M_1^{(0)} \cot \theta_0 \\
 & + \frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial x_2} - \left(\epsilon_4 \eta^{(1)} - \epsilon_8 p - \epsilon_5 h_B \right) \frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial x_2} = \\
 & = \epsilon_9 \tau_2 + \epsilon_6 \left(\frac{\partial^2 M_2^{(0)}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 M_2^{(0)}}{\partial x_2^2} \right) - \epsilon_7 M_2^{(0)} \quad (3.15b)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \epsilon_1 \epsilon_4 \frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial t} + \epsilon_2 \left[\frac{\partial M_1^{(1)}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_2^{(1)}}{\partial x_2} + \left(\epsilon_3 x_2 \frac{\partial M_1^{(0)}}{\partial x_1} - \epsilon_3 M_2^{(0)} \right) \tan \theta_0 \right] = \\
 & = \epsilon_1 \epsilon_8 \frac{\partial p}{\partial t} \quad (3.15c)
 \end{aligned}$$

Die Gleichungen (3.15a,b) werden nun kreuzweise nach x_2 bzw. x_1 differenziert und subtrahiert. Diese Operation ist in niedrigster Ordnung mit der Rotationsbildung äquivalent. Unter Berücksichtigung von (3.14a,b) erhält man dann

$$\begin{aligned}
 & \epsilon_1 \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \Psi + \epsilon_2 J(\Psi, \nabla^2 \Psi) + \epsilon_3 \cot \theta_0 \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} \\
 & + \frac{\partial M_1^{(1)}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_2^{(1)}}{\partial x_2} - \epsilon_3 \tan \theta_0 \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} - \epsilon_3 x_2 \tan \theta_0 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_1 \partial x_2} \\
 & + \epsilon_8 J(\Psi, p) + \epsilon_5 J(\Psi, h_B) = \\
 & = \epsilon_9 \left(\frac{\partial \tau_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \tau_1}{\partial x_2} \right) + \epsilon_6 \nabla^2 \nabla^2 \Psi - \epsilon_7 \nabla^2 \Psi \quad (3.16)
 \end{aligned}$$

Dabei sind die Definitionen $J(a,b) = \frac{\partial a}{\partial x_1} \frac{\partial b}{\partial x_2} - \frac{\partial a}{\partial x_2} \frac{\partial b}{\partial x_1}$

$$\text{und } \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$$

benutzt worden. In niedrigster Ordnung sind diese Operationen natürlich der Jacobi-Determinante bzw. dem Laplace-Operator äquivalent.

Unter Ausnutzung der Kontinuitätsgleichung (3.15c) ergibt sich schließlich eine Gleichung für $\Psi(x,t)$ allein:

$$\begin{aligned} \epsilon_1 \frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla^2 - \frac{\epsilon_+}{\epsilon_2} \right) \Psi + J(\Psi, \epsilon_2 \nabla^2 \Psi + \epsilon_5 h_B) \\ + \epsilon_3 \cot \theta_0 \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} - \epsilon_6 \nabla^4 \Psi + \epsilon_7 \nabla^2 \Psi = \\ = \epsilon_1 \left(\frac{\partial \tau_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \tau_1}{\partial x_2} \right) - \epsilon_8 \left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \frac{\partial p}{\partial t} + J(\Psi, p) \right) \end{aligned} \quad (3.17)$$

In den ursprünglichen Einheiten lautet (3.17)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla^2 - \frac{f_0^2}{g H_0} \right) \Psi + J\left(\frac{\Psi}{H_0}, \nabla^2 \Psi + f_0 h_B\right) \\ + \beta \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} - A \nabla^4 \Psi + B \nabla^2 \Psi = \\ = \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \tau_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \tau_1}{\partial x_2} \right) - \frac{f_0}{g \rho_0} \left[\frac{\partial p}{\partial t} + J\left(\frac{\Psi}{H_0}, p\right) \right] \end{aligned} \quad (3.17')$$

Gleichung (3.17) bzw. (3.17') ist eine Approximation an die Erhaltungsgleichung der potentiellen Vorticity. Wie aufgrund des Störungsansatzes zu erwarten war, sind noch alle der durch $\epsilon_1 \dots \epsilon_9$ gekennzeichneten Prozesse in (3.17) enthalten, wenngleich in unterschiedlich guter Näherung. Die mit dem Parameter ϵ_3 verknüpfte geometrische Approximation kann man übrigens auch auf direktem Wege erhalten, indem man (3.6) von vornherein in kartesischen Koordinaten schreibt mit $f = f_0 + \beta x_2$ (β -Ebene). Allerdings ist die Impulsbilanz (3.15a,b) nicht identisch mit (3.6a,b) auf der β -Ebene, worauf PEDLOSKY (1979) hingewiesen hat. Die abweichenden Terme entfallen jedoch beim Übergang zur Vorticity-Gleichung.

IV. ANALYTISCHES MODELL WINDBEDINGTER STRÖMUNGSSCHWANKUNGEN IM RECHTECKIGEN BECKEN

IV.1. Weitere Vereinfachung der Vorticity-Gleichung

Wir gehen aus von der Bewegungsgleichung (3.17), die für ein bestimmtes Wind- bzw. Luftdruckfeld und vorgegebene Geometrie zu lösen ist. Um mit analytischen Mitteln weiterzukommen, muß das Problem jedoch noch weiter vereinfacht werden. Zunächst wollen wir (3.17) in Ψ linearisieren, d.h. die Terme mit ε_2 vernachlässigen. Dies ist näherungsweise gerechtfertigt, da mit den oben gemachten Abschätzungen $\varepsilon_2 \ll \varepsilon_1, \varepsilon_3$ ist (vgl. Tabelle 3.1). Eine solche Ungleichung besteht zwar auch, z.T. sogar noch stärker, für die Parameter $\varepsilon_6 \dots \varepsilon_9$. Jedoch dürfen diese Terme keineswegs vernachlässigt werden, da bei fehlender Reibung ($\varepsilon_6, \varepsilon_7$) Resonanzkatastrophe eintritt, bei fehlender atmosphärischer Anregung ($\varepsilon_8, \varepsilon_9$) dagegen das hier interessierende Problem nicht behandelt werden kann.

Ferner beschränken wir uns auf die Geometrie eines rechteckigen Beckens mit ebenem Boden, d.h. $h_B(\underline{x}) \equiv 0$. Wie aus Tabelle 3.1 hervorgeht, ist dieser Fall zwar keine gute Approximation der typischen Verhältnisse im Ozean. Die mathematische Behandlung der Bodentopographie führt jedoch, mit Ausnahme einiger analytisch behandelbarer idealisierter Bodenprofile (s. z.B. LEBLOND & MYSAK, 1978), auf ähnliche Schwierigkeiten wie die der nichtlinearen Terme in (3.17). Ihre Behandlung wird auf Kap. V verschoben.

Mit diesen Näherungen erhalten wir aus (3.17')

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla^2 - \frac{f_0^2}{gH_0} \right) \Psi + \beta \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} - A \nabla^4 \Psi + B \nabla^2 \Psi = a \quad (4.1)$$

wobei die atmosphärische Antriebsfunktion durch

$$a(\underline{x}, t) = \frac{1}{\rho_0} \nabla \times \underline{\tau} - \frac{f_0}{g\rho_0} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (4.2)$$

als Summe von Schubspannungs- und Luftdruckeinfluß gegeben ist.

Wie aus Abb. 2.4 und den Bemerkungen in Kap. II hervorgeht, kann dabei der Luftdruckeinfluß in der Regel vernachlässigt werden.

Die Erzeugung von Strömungsanomalien durch fluktuierenden Auftriebsfluß (MAGAARD, 1977) wird in dieser Arbeit nicht behandelt. Neuere Abschätzungen (FRANKIGNOUL & MÜLLER, 1979b) haben ergeben, daß dieser Prozeß gegenüber den beiden erstgenannten Mechanismen erst bei Zeitskalen $O(100 \text{ Jahre})$ ins Gewicht fällt.

Wir werden später voraussetzen, daß die atmosphärische Anregung $a(\underline{x}, t)$ eine horizontal homogene und zeitlich stationäre Zufallsfunktion mit verschwindendem Mittelwert ist. Die Ergebnisse von Kap. IV.1 bis IV.3 gelten jedoch auch für eine beliebige deterministische Anregungsfunktion.

Gleichung (4.1) wird in einem rechteckigen Becken $0 \leq x_1 \leq L_1$, $0 \leq x_2 \leq L_2$ betrachtet. Die kinematische Randbedingung ist $\Psi = 0$ (kein Transport normal zur Grenzfläche). Als dynamische Randbedingung wählen wir $\nabla^2 \Psi = 0$ (freies Gleiten entlang der Grenzfläche). Es wird sich zeigen, daß diese Bedingung zu einer besonders einfachen Struktur der Reibungsgrenzschicht am Beckenrand führt. Zu Vergleichszwecken wird außerdem die Lösung von (4.1) in einem unendlich ausgedehnten Gebiet stets mitbetrachtet.

Wir interessieren uns für einen statistisch stationären Zustand und suchen daher Lösungen von (4.1) in der Form

$$\Psi(\underline{x}, t) = \sum_{\omega} \Psi(\underline{x}, \omega) e^{-i\omega t} \quad (4.3)$$

Die Summe erstreckt sich über positive und negative ω , mit der Realitätsbedingung $\Psi(\underline{x}, -\omega) = \Psi^*(\underline{x}, \omega)$. Damit geht (4.1) über in

$$\mathcal{D} \Psi(\underline{x}, \omega) = i a(\underline{x}, \omega) \quad (4.4)$$

mit den Abkürzungen

$$\mathcal{D} = \sigma \left(\nabla^2 - \frac{f_0^2}{g H_0} \right) + i \beta \frac{\partial}{\partial x_1} - i A \nabla^4 \quad (4.5)$$

und $\sigma = \omega + iB$. Dabei ist noch $a(\underline{x}, \omega)$ in Analogie zu (4.3) als Fourierkoeffizient der atmosphärischen Antriebsfunktion definiert.

IV.2. Freie Wellen und Eigenschwingungen 2. Art

Zur Orientierung behandeln wir zunächst den reibungs- und antriebsfreien Fall, $A = B = a = 0$, so daß Gleichung (4.4) übergeht in

$$-i\omega \left(\nabla^2 - \frac{f_0^2}{gH_0} \right) \Psi + \beta \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} = 0 \quad (4.6)$$

Diese Gleichung beschreibt die Ausbreitung freier planetarischer Wellen. In der divergenzfreien Approximation (d.h. unter Vernachlässigung des Terms f_0^2/gH_0) wurde sie erstmals von ROSSBY et al (1939) hergeleitet. In einem unendlich ausgedehnten Gebiet (im folgenden mit dem Index ∞ bezeichnet) ist eine partikuläre Lösung von (4.6) gegeben durch

$$\Psi^\infty(\underline{x}, \omega) = \Psi_k(\omega) e^{i\vec{k} \cdot \underline{x}} \quad (4.7)$$

wobei Frequenz und Wellenzahl durch die Dispersionsrelation

$$\omega = \Omega(\underline{k}) \equiv - \frac{\beta k_1}{k^2 + f_0^2/gH_0} \quad (4.8)$$

verknüpft sind. Gleichung (4.8) gibt das bekannte Resultat wieder, daß nur Wellen mit $k_1 < 0$ möglich sind, d.h. die Phasenausbreitung erfolgt stets in westliche Richtungen. Wegen der Linearität von (4.6) können weitere Lösungen durch Überlagerung von Wellen verschiedener Wellenzahlen (sofern sie (4.8) genügen) und beliebiger Amplituden erzeugt werden.

In einem endlichen rechteckigen Gebiet tritt zu (4.6) noch die kinematische RB $\Psi = 0$. (Die dynamische RB entfällt bei Vernachlässigung der Horizontalreibung.) Eine partikuläre Lösung ist in diesem Falle gegeben durch

$$\Psi(\underline{x}, \omega) = \Psi_m(\omega) e^{-i\frac{\beta x_1}{2\omega}} S_m(\underline{x}) \quad (4.9)$$

m	n	$T_{mn}[\text{d}]$	$T_{\text{diss}}/T_{\text{prop}}$
1	1	9.4	10.4
2	1	11.8	4.6
3	1	15.0	1.8
1	2	15.7	1.0
2	2	17.3	0.9
4	1	18.6	0.7
3	2	19.6	0.6
5	1	22.4	0.35
4	2	22.5	0.34
1	3	22.6	0.18
2	3	23.7	0.22

Tabelle 4.1:

Eigenperioden $T_{mn} = 2\pi/\omega_{mn}$ in Tagen gemäß (4.10) für $L_1 = 6500 \text{ km}$, $L_2 = 3700 \text{ km}$.

Das Verhältnis von Dissipations- zur Propagationszeit wird weiter unten im Text erläutert (vgl. (4.55)).

(LONGUET-HIGGINS, 1964). Dabei sind die Eigenfrequenzen

$\omega = \omega_{mn}$ gegeben durch

$$\omega_{mn} = \frac{\beta}{2} \left[\left(\frac{m\pi}{L_1} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{L_2} \right)^2 + \frac{f_0^2}{gH_0} \right]^{-1/2} \quad (4.10)$$

und zur Abkürzung ist noch

$$S_{mn}(\underline{x}) = 2 (L_1 L_2)^{-1/2} \sin \frac{m\pi x_1}{L_1} \sin \frac{n\pi x_2}{L_2} \quad (4.11)$$

gesetzt worden. Die durch (4.9) beschriebenen Eigenschwingungen 2. Art sind eine Kombination stehender und fortlaufender Wellen, wobei letztere mit der Phasengeschwindigkeit $c = -2\omega^2/\beta$ stets nach Westen wandern. Weitere Lösungen können aus (4.9) wiederum durch Superposition erhalten werden.

Die zu den Eigenschwingungen niedrigster Ordnung gehörigen Eigenperioden $T_{mn} = 2\pi/\omega_{mn}$ sind für ein Becken von typischer ozeanischer Dimension in Tabelle 4.1 angegeben.

IV.3. Erzwungene Oszillationen

Im allgemeinen Fall ($A, B, a \neq 0$) betrachten wir zunächst wiederum die Situation in einem unbegrenzten Gebiet. Da (4.4) konstante Koeffizienten hat, läßt sich durch Übergang zur Fourier-Darstellung die Lösung auf einfache Weise finden. Definieren wir

$$a(\underline{x}, \omega) = \sum_{\underline{k}} a_{\underline{k}}(\omega) e^{i \underline{k} \cdot \underline{x}} \quad (4.12)$$

so ergibt sich durch Einsetzen in (4.4)

$$\Psi^\infty(\underline{x}, \omega) = i \sum_{\underline{k}} \frac{a_{\underline{k}}(\omega)}{D_{\underline{k}}(\omega)} e^{i \underline{k} \cdot \underline{x}} \quad (4.13)$$

mit

$$D_{\underline{k}}(\omega) = - \left[\omega \left(k^2 + \frac{f_0^2}{gH_0} \right)^2 + \beta k + i R_k \right] \quad (4.14)$$

und

$$R_k = A k^4 + B (k^2 + f_0^2 / g H_0) \quad (4.15)$$

Dabei hat $D_k(\omega)$ den Charakter eines Resonanznennters und verschwindet im reibungsfreien Fall genau dann, wenn Frequenz und Wellenzahl der Dispersionsrelation (4.8) genügen.

Prinzipiell läßt sich auch im abgeschlossenen Becken eine exakte Lösung von (4.4) angeben. So könnte man z.B. (4.13) als eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung (4.4) wählen, und mit Hilfe von Exponentialfunktionen Lösungen der homogenen Gleichung so bestimmen, daß die Randbedingungen erfüllt sind. Dieser Weg wird hier nicht beschritten, da die so erhaltene Gesamtlösung algebraisch sehr kompliziert ist. Wir begnügen uns stattdessen mit einer Näherungslösung, die für hinreichend schwache Reibung gültig ist.

Als partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung (4.4), welche noch nicht unbedingt alle Randbedingungen erfüllen muß, setzen wir in Anlehnung an (4.9) versuchsweise an

$$\Psi^I(\underline{x}, \omega) = \sum_{mn} \Psi_{mn}^I(\omega) e^{-i\alpha_{mn}x_1} S_{mn}(\underline{x}) \quad (4.16)$$

mit zunächst noch unbekannten (komplexen) Koeffizienten Ψ_{mn}^I und α_{mn} . Das Argument ω wird im folgenden fortgelassen, wo keine Mißverständnisse möglich sind.

Durch Ausrechnen stellt man zunächst fest, daß für eine bestimmte Wahl der α_{mn} die Ortsfunktionen in (4.16) Eigenfunktionen des Operators D aus (4.5) sind:

$$D \Psi^I(\underline{x}) = \sum_{mn} D_{mn} \Psi_{mn}^I e^{-i\alpha_{mn}x_1} S_{mn}(\underline{x}) \quad (4.17)$$

Die Eigenwerte D_{mn} ergeben sich, mit der Abkürzung

$$\tau_{mn} = \left(\frac{n\pi}{L_1} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{L_2} \right)^2 + \alpha_{mn}^2 \quad (4.18)$$

zu

$$D_{mn} = \alpha_{mn} \beta - \sigma \left[\tau_{mn} + \frac{f_0^2}{g H_0} \right] - i A \left[\tau_{mn}^2 + \alpha_{mn}^2 \left(\frac{2\pi m}{L_1} \right)^2 \right] \quad (4.19)$$

Voraussetzung für die Gültigkeit von (4.17) ist jedoch, daß die α_{mn} der kubischen Gleichung

$$\alpha_{mn} \left\{ 1 + \frac{2iA}{\sigma} \left[\left(\frac{m\pi}{L_1} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{L_2} \right)^2 + \alpha_{mn}^2 \right] \right\} = \frac{\beta}{2\sigma} \quad (4.20)$$

genügen.

Die Eigenfunktionen des Operators D sind nun allerdings im allgemeinen nicht orthogonal, und auch die Vollständigkeit des Funktionensystems kann nicht ohne weiteres vorausgesetzt werden. Der Operator D ist nämlich nicht selbstadjungiert, sofern $A, B \neq 0$ ist. Eine strenge Darstellung der gesuchten Stromfunktion mit Hilfe dieses Funktionensystems stößt daher auf große Schwierigkeiten.

Ist die Reibung jedoch genügend schwach, so können Eigenfunktionen und Eigenwerte nach den beiden Reibungsparametern A und B (bzw. ε_6 und ε_7) entwickelt werden. Dabei beschränken wir uns bei den Eigenfunktionen auf die niedrigste Ordnung, indem wir (4.20) durch

$$\alpha_{mn} = \frac{\beta}{2\omega} \equiv \alpha \quad (4.21)$$

approximieren. In dieser Näherung sind also die α_{mn} reell und hängen nicht mehr von den Indizes ab. Bei den Eigenwerten ist dagegen die niedrigste Ordnung nicht ausreichend, da sonst bei den durch (4.10) gegebenen Frequenzen eine Resonanzkatastrophe auftreten würde. Wir approximieren daher D_{mn} , indem in (4.18) bzw. (4.19) α_{mn} durch α aus (4.21) ersetzt wird. Da dann D_{mn} bereits linear in A und B ist, erübrigt sich eine weitere Linearisierung.

Mit dieser Näherung lassen sich nun die Entwicklungskoeffizienten ψ_{mn}^I aus (4.16) auf einfache Weise finden. Dazu entwickeln wir die atmosphärische Anregungsfunktion gemäß

$$a(\underline{x}) = e^{-i\alpha x_1} \sum_{mn} a_{mn} S_{mn}(\underline{x}) \quad (4.22)$$

mit den Koeffizienten

$$a_{mn} = \int d\underline{x} \, a(\underline{x}) e^{i\alpha x_1} S_{mn}(\underline{x}) \quad (4.23)$$

Durch Einsetzen in (4.4) und Vergleich mit (4.17) ergibt sich dann

$$\Psi_{mn}^I = i \frac{a_{mn}}{D_{mn}} \quad (4.24)$$

Die atmosphärische Anregungsfunktion $a(\underline{x})$ hat am Rand des betrachteten Gebietes keine Besonderheit, insbesondere verschwindet sie normalerweise dort nicht. Die Summe (4.22) ist daher im allgemeinen nicht gleichmäßig konvergent, und für große Werte von m, n ist $a_{mn} = O(mn)^{-1}$. Dagegen ist $\Psi_{mn}^I = O(mn[m^2 + n^2]^2)^{-1}$. Wir können daher für die Summe (4.16) bis einschließlich zur zweiten Ableitung ausreichende Konvergenzeigenschaften voraussetzen.

Damit ergibt sich, daß die spezielle Lösung (4.16) bereits die kinematische Randbedingung $\Psi = 0$ erfüllt. Vernachlässigt man die Horizontalreibung, so entfällt ja die dynamische RB, und (4.16) stellt dann bereits die endgültige Lösung dar. Sie ist sogar exakt, wenn man in (4.21) ω durch σ ersetzt. In diesem Fall stimmt sie (bei anderer Darstellung) mit der von PEDLOSKY (1965) gefundenen Lösung überein, welche später auch bei PHILLIPS (1966) und HARRISON (1979) verwendet wurde.

Wir wollen nun zeigen, daß auch unter Berücksichtigung der dynamischen RB (4.16) eine Näherungslösung von (4.4) darstellt. Dazu suchen wir eine Lösung Ψ^H der homogenen Gleichung

$$D \Psi^H(\underline{x}) = 0 \quad (4.25)$$

mit den RB $\Psi^H = 0$ und $\nabla^2 \Psi^H = -\nabla^2 \Psi^I$, so daß die Gesamtlösung durch $\Psi = \Psi^I + \Psi^H$ gegeben ist. Es wird sich herausstellen, daß

$|\psi^H| \ll |\psi^I|$ ist, so daß der homogene Anteil vernachlässigt werden kann. Zunächst werten wir $\nabla^2 \psi^I$ auf dem Rande aus. Auf den zonalen Berandungen $x_2 = 0, L_2$ ergibt sich dabei $\nabla^2 \psi^I = 0$, d.h. die spezielle inhomogene Lösung erfüllt hier auch die dynamische RB. Auf den meridionalen Berandungen $x_1 = 0, L_1$ erhält man dagegen

$$\nabla^2 \psi^I = - \sum_n q_n(x_1) \sin \frac{n\pi x_2}{L_2} \quad (4.26)$$

wobei die q_n durch

$$q_n(x_1) = \frac{4\pi\alpha}{L_1^{3/2} L_2^{1/2}} \sum_m m \psi_{nm}^I \cos \frac{m\pi x_1}{L_1} \quad (4.27)$$

gegeben sind.

Gleichung (4.25) wird nun durch den Ansatz

$$\psi^H(\underline{x}) = \sum_n \sin \frac{n\pi x_2}{L_2} \sum_{\mu=1}^4 \psi_{n\mu}^H e^{i x_{n\mu} x_1} \quad (4.28)$$

gelöst, wobei für jedes n die $\kappa_{n\mu}$ Wurzeln der charakteristischen Gleichung

$$x_{n\mu}^2 + \left(\frac{n\pi}{L_2}\right)^2 + \frac{f_0^2}{g H_0} + \frac{\beta x_{n\mu}}{\sigma} + i \frac{A}{\sigma} \left[x_{n\mu}^2 + \left(\frac{n\pi}{L_2}\right)^2 \right] = 0 \quad (4.29)$$

sind. Kinematische und dynamische RB bei $x_1 = 0$ bzw. $x_1 = L_1$ ergeben nun

$$\sum_{\mu=1}^4 \psi_{n\mu}^H = 0 \quad (a)$$

$$\sum_{\mu=1}^4 \psi_{n\mu}^H e^{i x_{n\mu} L_1} = 0 \quad (b)$$

$$\sum_{\mu=1}^4 \psi_{n\mu}^H x_{n\mu}^2 = q_n(0) \quad (c) \quad (4.30)$$

$$\sum_{\mu=1}^4 \psi_{n\mu}^H x_{n\mu}^2 e^{i x_{n\mu} L_1} = q_n(L_1) \quad (d)$$

Für jeden Wert von n ist (4.30) ein System von 4 Gleichungen zur Bestimmung der $\Psi_{n\mu}^H$.

Für die näherungsweise Bestimmung der Wurzeln von (4.29) beschränken wir uns auf Frequenzen $\omega \gtrsim (\beta^2 A)^{1/3}$ und nicht zu große Werte von n . Bei schwacher Horizontalreibung läßt sich (4.29) dann aufspalten in

$$\begin{aligned} x_{n\mu}^2 + \left(\frac{n\pi}{L_2}\right)^2 + \frac{f_0^2}{gH_0} + \frac{\beta x_{n\mu}}{\sigma} &= 0, \quad \mu=1,2 \quad (a) \\ x_{n\mu}^2 - i\sigma/A &= 0, \quad \mu=3,4 \quad (b) \end{aligned} \quad (4.31)$$

Für $\mu = 1,2$ ergeben sich also Wurzeln, die der Horizontal-skala planetarischer Wellen entsprechen, für $\mu = 3,4$ dagegen entsprechen die Wurzeln einer Skala $d = |A/\sigma|^{1/2} \ll L_1$. Eine Näherungslösung von (4.30c,d) ist dann gegeben durch

$$\begin{aligned} \Psi_{n3}^H &= q_n(0) / x_{n3}^2 \\ \Psi_{n4}^H &= q_n(L_1) e^{-ix_{n4}L_1} / x_{n4}^2 \end{aligned} \quad (4.32)$$

Hier ist κ_{n3} definiert als diejenige Wurzel von (4.31b), deren Imaginärteil positiv ist. Die zu $\mu = 3,4$ gehörigen Summanden in (4.28) beschreiben also Lösungen, die nur in einer Reibungsgrenzschicht der Dicke d am westlichen ($\mu = 3$) bzw. am östlichen ($\mu = 4$) Rand des Beckens von Null verschieden sind. Aus (4.32) ergibt sich dabei $|\Psi_{n3}^H| \gg |\Psi_{n4}^H|$. Die zu $\mu = 1,2$ gehörigen Amplituden lassen sich nun aus (4.30a,b) leicht berechnen, sind jedoch nicht weiter von Interesse, da $\Psi_{n1,2}^H = O(\Psi_{n3}^H)$ ist. Das bedeutet, daß homogene und inhomogene Lösung im Verhältnis

$$\left| \frac{\Psi^H}{\Psi^I} \right| = O\left(\frac{\alpha}{L_1} \cdot d^2\right) \ll 1$$

zueinander stehen. Diese Ungleichung gilt im gesamten Gebiet

einschließlich der Reibungsgrenzschichten. Ebenso gilt überall $|\nabla \Psi^H| \ll |\nabla \Psi^I|$. Dagegen gilt $|\nabla^2 \Psi^H| \ll |\nabla^2 \Psi^I|$ nur außerhalb der Reibungsschichten, während innerhalb beide Anteile von gleicher Größenordnung sein können.

Zusammenfassend stellen wir also fest: Die durch (4.16) und (4.24) gegebene Funktion $\Psi = \Psi^I$ ist, im Rahmen der oben gemachten Näherungen, eine Lösung von (4.4) einschließlich aller zugehörigen RB. Die Approximation ist im gesamten Gebiet gültig, solange wir nur die Stromfunktion und ihren Gradienten (Geschwindigkeit) betrachten. Für höhere Ableitungen muß in den Grenzschichten entlang meridionaler Berandungen die homogene Lösung (4.28) berücksichtigt werden. Dabei ist eine Beschränkung auf $\mu = 3,4$ ausreichend. Entlang zonaler Berandungen existieren keine Reibungsgrenzschichten, da die reibungsfreie Lösung hier bereits die dynamische RB $\nabla^2 \Psi = 0$ erfüllt. Hätten wir stattdessen als dynamische RB Verschwinden der Tangentialkomponente des Volumentransports gefordert, würden sich auch an zonalen Berandungen Grenzschichten ergeben.

Es bleibt noch zu bemerken, daß die obige Approximation für $\omega \rightarrow 0$ ihre Gültigkeit verliert. Dies ist schon aus physikalischen Gründen zu erwarten, da in diesem Grenzfall bereits die Stromfunktion (d.h. nicht erst Vorticity und höhere Ableitungen) am westlichen Rand entscheidend durch die Reibung beeinflusst wird. Mathematisch ergibt sich dieser Sachverhalt daraus, daß die Näherung (4.21) für $\omega \rightarrow 0$ singular wird. Wie aus (4.20) zu ersehen, ist in diesem Grenzfall α_{mn} , und damit die Struktur der Eigenfunktionen, entscheidend von den Reibungsparametern bestimmt. Außerdem ist natürlich, wie in Kap. III.2 gezeigt wurde, für $\omega \rightarrow 0$ die Vernachlässigung der baroklinen Reaktion nicht erlaubt.

IV.4. Statistische Darstellung der ozeanischen Reaktion

Im vorigen Abschnitt wurde die Funktion

$$\Psi(\underline{x}) = i e^{-i\alpha x} \sum_{mn} \frac{a_{mn}}{D_{mn}} S_{mn}(\underline{x}) \quad (4.34)$$

als Näherungslösung der Gleichung (4.4) identifiziert. Ebenso wie das äußere Kraftfeld $a(\underline{x})$ ist $\Psi(\underline{x})$ eine stochastische Größe, deren statistische Parameter im folgenden bestimmt werden sollen. Während nun im deterministischen Fall die Darstellung (4.34) mit Hilfe der Entwicklungskoeffizienten a_{mn} in vieler Hinsicht die natürlichste ist, ergibt sich im stochastischen Fall eine etwas andere Situation. Der Grund dafür ist, daß die statistischen Eigenschaften des äußeren Kraftfeldes ganz unabhängig von der Beckengeometrie sind. Damit eignen sich die a_{mn} nicht besonders gut zur Darstellung der statistischen Aspekte von $a(\underline{x})$. Direkte Berechnung des Frequenzspektrums von Ψ ,

$$E_{\Psi}(\omega) \Delta\omega = 2 \langle \Psi(\underline{x}) \Psi^*(\underline{x}) \rangle \quad (4.35)$$

führt nämlich unmittelbar auf Erwartungswerte der Form $\langle a_{mn} a_{m'n'}^* \rangle$, die zwar im Prinzip berechenbar, jedoch nicht mehr diagonal, d.h. proportional zu $\delta_{mm'} \delta_{nn'}$, sind. Zweckmäßiger ist hier eine Darstellung der meteorologischen Antriebsfunktion in der Form (4.12), mit statistisch orthogonalen Koeffizienten

$$2 \langle a_{\underline{k}}(\omega) a_{\underline{k}'}^*(\omega) \rangle = F_a(\underline{k}, \omega) \Delta\underline{k} \Delta\omega \delta_{\underline{k}\underline{k}'} \quad (4.36)$$

(vgl. Anhang A).

Durch Kombination von (4.12) und (4.23) ergibt sich für die Entwicklungskoeffizienten a_{mn}

$$a_{mn} = \sum_{\underline{k}} a_{\underline{k}} \int d\underline{x} e^{i\underline{k} \cdot \underline{x}} e^{i\alpha x_1} S_{mn}(\underline{x}) \quad (4.37)$$

Das Integral in (4.37) läßt sich analytisch ausrechnen mit dem Resultat

$$a_{mn} = \sum_{\underline{k}} a_{\underline{k}} I_m(k_1) J_n(k_2) \quad (4.38)$$

mit

$$I_m(k_1) = (2L_1)^{1/2} m\pi \frac{1 - (-1)^m e^{i(k_1 + \alpha)L_1}}{(m\pi)^2 - (k_1 + \alpha)^2 L_1^2} \quad (4.39a)$$

$$J_n(k_2) = (2L_2)^{1/2} n\pi \frac{1 - (-1)^n e^{ik_2 L_2}}{(n\pi)^2 - (k_2 L_2)^2} \quad (4.39b)$$

Die Ausdrücke (4.39) sind reguläre Funktionen der Wellenzahl auch an Stellen, wo der Nenner verschwindet. Die Lösung (4.34) schreibt sich als

$$\Psi(\underline{x}) = i e^{-i\alpha x_1} \sum_{\underline{k}} a_{\underline{k}} \sum_{m,n} \frac{I_m(k_1) J_n(k_2)}{D_{mn}} S_{mn}(\underline{x}) \quad (4.40)$$

und ist hinsichtlich der $a_{\underline{k}}$ von ähnlicher Struktur wie (4.13) für ein unbegrenztes Becken. Unter Benutzung von (4.36) erhält man für das Frequenzspektrum der Stromfunktion $E_\Psi(\omega)$ in beiden Fällen

$$E_\Psi(\omega) = \int d\underline{k} F_a(\underline{k}, \omega) T_\Psi(\underline{k}, \omega) \quad (4.41)$$

bei gleichzeitigem Übergang zu einer kontinuierlichen Darstellung im Wellenzahlraum. Die statistische Übertragungsfunktion $T_\Psi(\underline{k}, \omega)$ ist im unbegrenzten Gebiet gegeben durch

$$T_\Psi^\infty(\underline{k}, \omega) = |D_{\underline{k}}(\omega)|^{-2} \quad (4.42a)$$

und im endlichen Becken durch

$$T_\Psi(\underline{k}, \omega) = \left| \sum_{m,n} \frac{I_m(k_1) J_n(k_2)}{D_{mn}} S_{mn}(\underline{x}) \right|^2 \quad (4.42b)$$

Zu (4.41) analoge Darstellungen ergeben sich für die Spektren von Volumentransport bzw. Strömungsgeschwindigkeit, mit den Übertragungsfunktionen

$$T_{(M_1, M_2)}^\infty(\underline{k}, \omega) = (k_2^2, k_1^2) T_\Psi^\infty(\underline{k}, \omega) \quad (4.43a)$$

$$T_{(M_1, M_2)}(\underline{k}, \omega) = \left| \left(\frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_1} \right) e^{-i\alpha x_1} \sum_{m,n} \dots \right|^2 \quad (4.43b)$$

Obwohl der Integrand von (4.41) stets nicht negativ ist, kann er nur im unbegrenzten Gebiet eindeutig als Frequenz-Wellenzahlspektrum der Stromfunktion interpretiert werden. Im abgeschlossenen Becken sind dagegen die ozeanischen im Gegensatz zu den atmosphärischen Variablen nicht mehr horizontal homogene Funktionen, und das Konzept eines Wellenzahlspektrums ist allenfalls für größere Wellenzahlen lokal anwendbar.

IV.5. Diskussion der Übertragungsfunktion

IV.5.1. Unbegrenztes Gebiet

Die durch (4.42a) gegebene Übertragungsfunktion für ein unbegrenztes Gebiet lautet ausgeschrieben

$$T_{\psi}^{\infty}(k, \omega) = \left\{ \left[\omega(k^2 + f_0^2/gH_0) + \beta k \right]^2 + R_k^2 \right\}^{-1} \quad (4.44)$$

und hat die Struktur des Resonanznenners aus (4.14). Sie ist in Abb. 4.1 für einige Frequenzen dargestellt. Falls nicht anders angegeben, wurden für die Reibungsparameter die Werte $A = 1.5 \cdot 10^8 \text{ cm}^2/\text{s}$ und $B = 1.2 \cdot 10^{-7} \text{ s}^{-1}$ gewählt. Es lassen sich drei verschiedene Frequenzbereiche identifizieren, in denen ein qualitativ verschiedenes Verhalten vorliegt. Eine zentrale Rolle kommt offensichtlich jenen Frequenzen zu, bei denen der Ozean resonant reagieren kann, d.h. also die Resonanzbedingung (4.8) erfüllt ist. Formal bildet dieser Frequenzbereich ein Kontinuum, welches nach oben hin durch die Frequenz

$$\omega_{\max} = \beta (gH_0)^{1/2} / f_0 \quad (4.45)$$

begrenzt ist, während nach unten hin keine formale Schranke existiert, d.h. Resonanz ist auch bei sehr tiefen Frequenzen möglich. Mit den obigen Standard-Parametern ergibt sich aus (4.45) eine Periode $T_{\min} \approx 2 \text{ d.}$ Dieser Wert entspricht der Wellenzahl $k_1 = -f_0/(gH_0)^{1/2}$ bzw. $k_2 = 0$ und ist insoweit un-

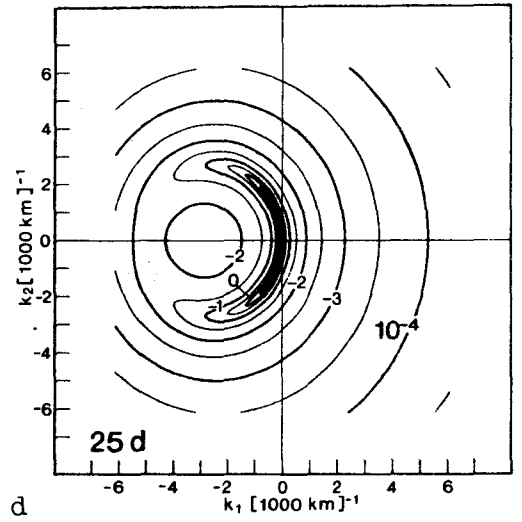
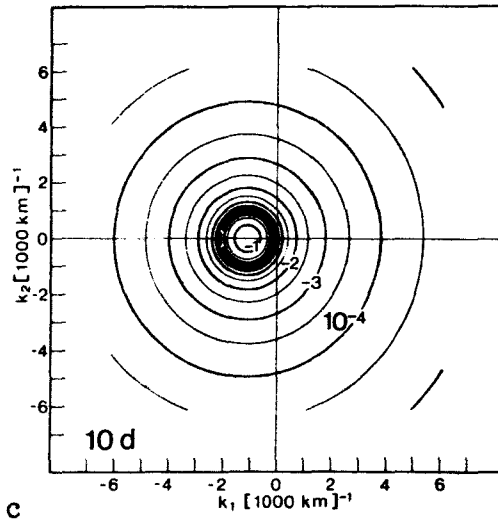
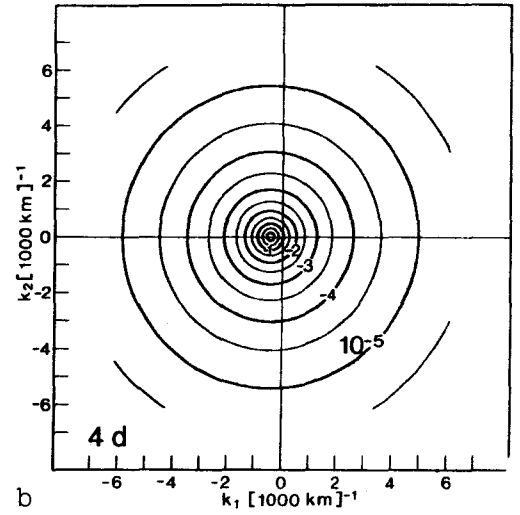
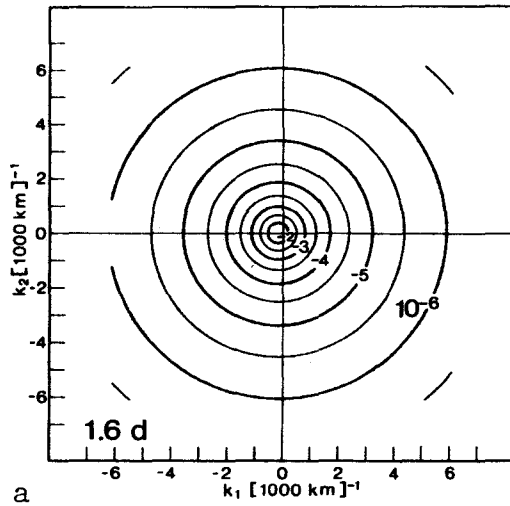
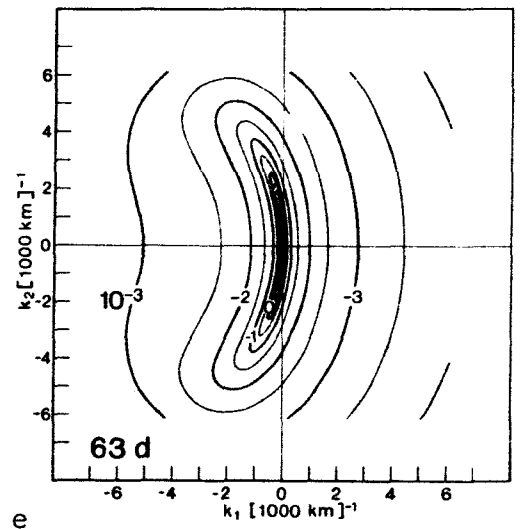


Abb. 4.1:

Logarithmische Isolinien der Übertragungsfunktion $T^\infty(\mathbf{k}, \omega)$ aus (4.44) für verschiedene Perioden. Reibungsparameter sind

$$A = 1.5 \cdot 10^8 \text{ cm}^2/\text{s}$$

$$B = 1.2 \cdot 10^{-7} \text{ s}^{-1}$$



realistisch, als solche Wellenlängen in einem Becken von typischer ozeanischer Dimension nicht möglich sind. Die ozeanisch relevanten Grenzen des Resonanzbereichs sind, wie sich im folgenden herausstellen wird, nach oben durch die Beckengröße und nach unten durch die Reibung bestimmt.

Betrachtet man $T_{\Psi}^{\infty}(k, \omega)$ für ein festes ω , so ergibt sich im Resonanzbereich folgendes Bild: Auf den Resonanzkreisen

$$\left(k_1 + \frac{\beta}{2\omega}\right)^2 + k_2^2 = \left(\frac{\beta}{2\omega}\right)^2 - \frac{f_0^2}{gH_0} \quad (4.46)$$

hängt der Wert der Übertragungsfunktion entscheidend von den Reibungsparametern A, B ab. Schreibt man (4.44) in der Form

$$T_{\Psi}^{\infty}(k, \omega) = \left\{ \left[k^2 + \frac{f_0^2}{gH_0} \right] \left[\omega - \Omega(k) \right]^2 + R_k' \right\}^{-1} \quad (4.47)$$

so erkennt man, daß sich der Reibungseinfluß über einen Wellenzahlbereich der Größenordnung

$$\delta k \sim \frac{R_k}{(k^2 + f_0^2/gH_0) v_g} \quad (4.48)$$

normal zum Resonanzkreis erstreckt, wobei $v_g = \partial\Omega/\partial k$ die Gruppengeschwindigkeit der freien Rossby-Wellen ist.

Approximiert man $v_g \sim \omega/k$, so ergibt sich unter Vernachlässigung von f_0^2/gH_0 gegen k^2 die Beziehung

$$\frac{\delta k}{k} \sim \frac{Ak^2 + B}{\omega} \quad (4.49)$$

Die rechte Seite von (4.49) ist das Verhältnis von Wellenperiode zur Dämpfungszeit, und ist normalerweise $\ll 1$. Nur in einem sehr kleinen Bereich der k -Ebene wird also der Wert der Übertragungsfunktion von der Reibung beeinflusst. In diesem Bereich liegt er allerdings größenordnungsmäßig um den Faktor $(k/\delta k)^2$ über dem der Umgebung. Die Übertragungsfunktion hat also im Resonanzbereich ein nahezu diskontinuierliches Verhalten (vgl. Abb. 4.1c), ein Umstand, der bei der numerischen Aus-

wertung des Integrals (4.41) zu beachten ist.

Die Resonanzüberhöhung ist umso weniger ausgeprägt, je größer die Wellenperiode ist, mit Ausnahme sehr kleiner Wellenzahlen. Ist die Ungleichung

$$\omega \ll \beta / k_c \quad (4.50)$$

erfüllt, wobei k_c die größte relevante Wellenzahl des Windfeldes ist (vgl. Kap. II.4.3.), dann läßt sich die Übertragungsfunktion (4.44) durch

$$T_\psi^\infty(k, \omega) = (\beta^2 k^2 + R_k^2)^{-1} \quad (4.51)$$

approximieren. Sie wird also unabhängig von ω , und daher wird ein (hinsichtlich ω) weißes Spektrum des Windfeldes auch zu weißen Spektren der ozeanischen Variablen führen. Die durch (4.50) definierte Frequenz entspricht einer Periode von 60-70 Tagen. Physikalisch entspricht der Übertragungsfunktion (4.51) in der Ausgangsgleichung (4.1) ein zeitlich variables Sverdrup-Gleichgewicht zwischen planetarischer und Schubspannungsvorticity, welches bei höheren Wellenzahlen durch Reibung modifiziert ist.

Bei sehr kurzen Perioden verschwindet das Resonanzphänomen ebenfalls. Hier läßt sich die Übertragungsfunktion approximieren durch

$$T_\psi^\infty(k, \omega) = [\omega (k^2 + f_0^2 / g H_0)]^{-2} \quad (4.52)$$

Der Ozean reagiert in diesem Bereich mit erzwungenen Schwingungen, die keinen Wellencharakter haben, keinerlei horizontale Vorzugsrichtung mehr aufweisen und von der Reibung völlig unabhängig sind. Die Übertragungsfunktion ist hier stark zu den größeren Raum- und Zeitskalen hin gewichtet.

Die obige Einteilung in drei verschiedene Frequenzbereiche gilt natürlich in gleicher Weise auch für die Übertragungsfunktion (4.43a) der Komponenten des Massentransports. Sie

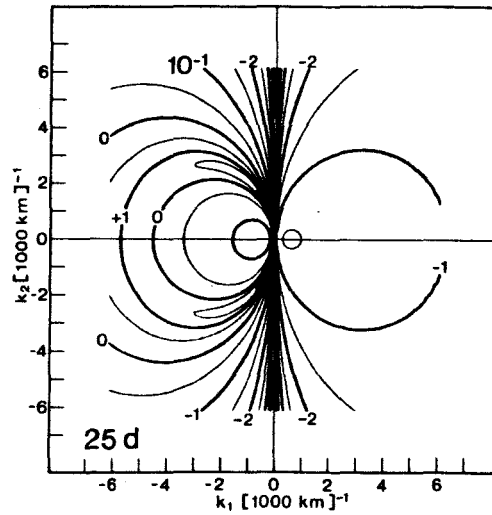
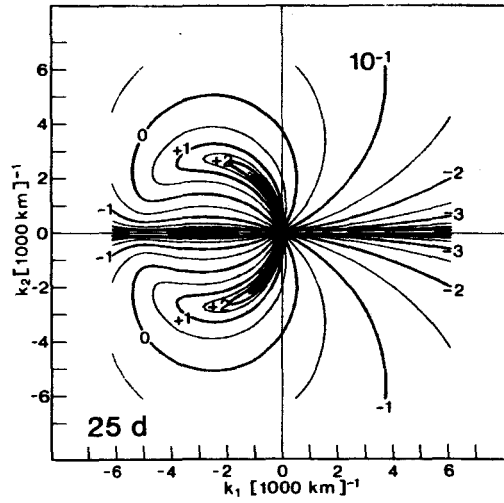


Abb. 4.2:

Isolinien der Übertragungsfunktion $T_{M_1}^{\infty}(\underline{k}, \omega)$ (oben) bzw. $T_{M_2}^{\infty}(\underline{k}, \omega)$ (unten) bei einer Periode von 25 d.

ist in Abb. 4.2 für eine im Resonanzbereich liegende Frequenz dargestellt. Als wesentlicher Unterschied gegenüber der entsprechenden Abb. 4.1 ergibt sich, daß die Übertragungsfunktion von $M_1(M_2)$ für kleine $k_2(k_1)$ verschwindet und bei großen Wellenzahlen entsprechend langsamer zurückgeht. Der Massentransport reagiert also empfindlicher auf den kleinskaligen Anteil der atmosphärischen Anregung als Stromfunktion bzw. Oberflächenauslenkung.

IV.5.2. Abgeschlossenes Becken

Die Übertragungsfunktion (4.42b) im Zentrum eines Beckens der Dimension $L_1 = 6500$ km, $L_2 = 5700$ km ist für die gleichen Frequenzen wie oben in Abb. 4.3 dargestellt. Die Summe in (4.42b) wurde dabei über $m, n \leq 50$ erstreckt. Nahezu identische Resultate erhält man bereits mit $m, n \leq 30$. Gegenüber dem unbegrenzten Gebiet ergeben sich die folgenden Unterschiede:

a) Der Resonanzbereich besteht jetzt aus den diskreten, durch (4.10) gegebenen Frequenzen ω_{mn} . Die Perioden der Eigenfunktionen niedrigster Ordnung sind in Tab. 4.1 angegeben.

b) Während $T^\infty(k, \omega)$ eine glatte Funktion von ω und außerhalb des Resonanzkreises auch eine glatte Funktion von k ist, sind die einzelnen Terme in (4.42b) oszillierend in k . Je dichter nun die Frequenz an einer der Resonanzfrequenzen ω_{mn} liegt, desto größer wird der relative Beitrag des entsprechenden Terms zur Gesamtsumme, die dann ebenfalls oszillierenden Charakter hat. Am ausgeprägtesten sieht man dies bei der Periode von 10 d, welche dicht an der Resonanzstelle für $m = n = 1$ liegt. Außerhalb des Resonanzbereichs trägt eine größere Anzahl von Summanden zur Übertragungsfunktion bei, und die Oszillationen werden weniger ausgeprägt.

c) Im Bereich der erzwungenen Schwingungen gilt $T(k, \omega)/T^\infty(k, \omega) \approx 1$ für Wellenzahlen $|k_\alpha| \gg 2\pi/L_\alpha$. Dies ist zu erwarten, da bei großen Wellenzahlen der Einfluß des Randes

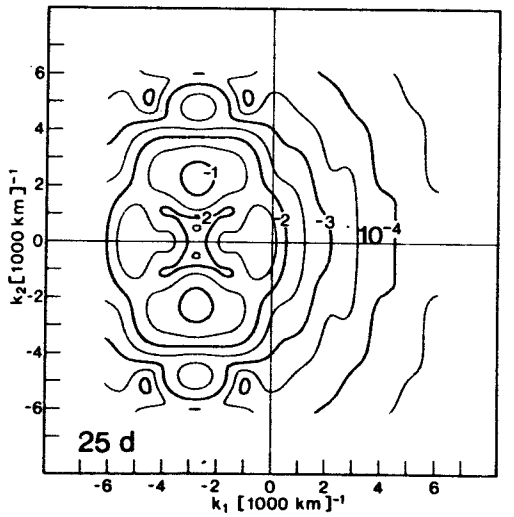
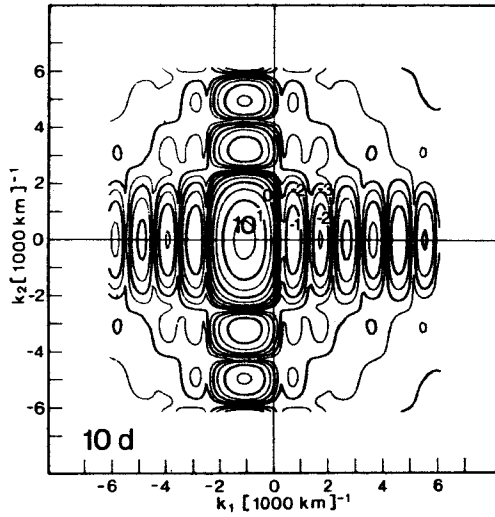
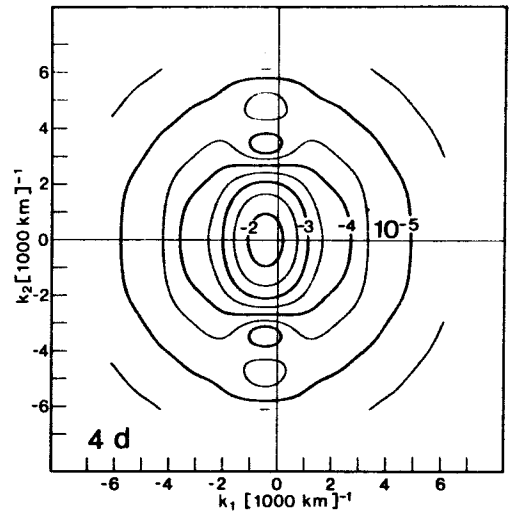
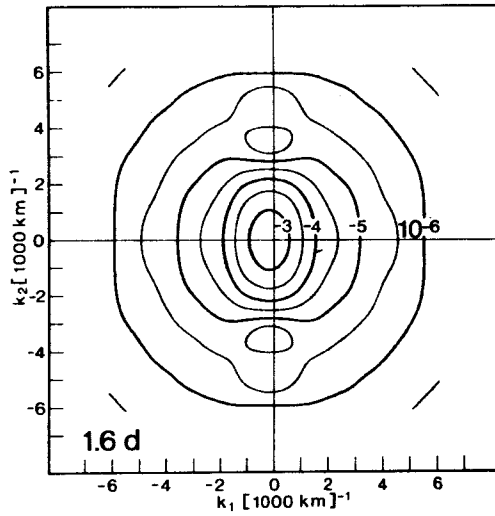
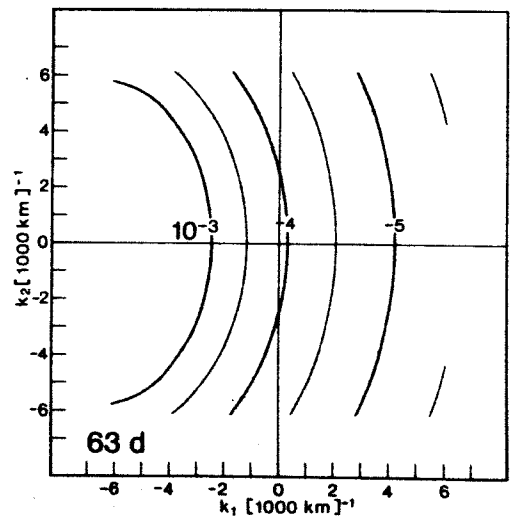


Abb. 4.3:

Übertragungsfunktion im abgeschlossenen Becken, mit $L_1 = 6500$ km und $L_2 = 3700$ km. Reibungsparameter wie in Abb. 4.1.



gering sein muß, sofern keine propagierenden Wellen möglich sind.

d) Die Übertragungsfunktion hängt jetzt vom Ort \tilde{x} ab. Das Beckenzentrum ist insofern ein spezieller Punkt, als hier $T_\psi(\tilde{k}, \omega)$ spiegelsymmetrisch zur Wellenzahl $(k_1, k_2) = (-\alpha, 0)$ ist. Allgemein bleibt diese Spiegelsymmetrie erhalten, wenn man gleichzeitig zum spiegelsymmetrischen Ort des Beckens übergeht, d.h. x_α durch $L_\alpha - x_\alpha$ ersetzt. Abb. 4.4 zeigt $T_\psi(\tilde{k}, \omega)$ für $(x_1, x_2) = (0.04L_1, 0.5L_2)$.

Die Tatsache, daß solche Symmetrieeigenschaften existieren, weist übrigens darauf hin, daß die Näherungslösung (4.34) eine für gewisse Fragestellungen bedeutsame Unsymmetrie nicht enthält. Physikalisch läßt sich ja die Eigenschwingung (4.9) interpretieren als Superposition von jeweils zwei freien Wellen der Form (4.7), wobei die betragsmäßig größere der beiden Wellenzahlen einer ostwärts gerichteten Gruppengeschwindigkeit zugeordnet ist. Eine lange Welle mit Gruppengeschwindigkeit nach Westen erzeugt also durch Reflexion am westlichen Beckenrand eine kurze Welle mit Gruppengeschwindigkeit nach Osten. Durch Horizontalreibung (nicht aber durch Bodenreibung) werden die kurzen Wellen stärker gedämpft als die langen, und man wird zum westlichen Rand hin eine Zunahme der Energiedichte kurzer Wellen erwarten, im Gegensatz zur Abb. 4.4, wo keine solche Zunahme ersichtlich ist. Der Grund hierfür liegt in der Approximation (4.21), in der das (komplexe) α_{mn} aus der Eigenfunktion (4.16) durch den (reellen) reibungsfreien Wert α ersetzt wurde. Der besprochene Effekt läßt sich erst dann durch eine Lösung der Form (4.16) darstellen, wenn man bezüglich des Reibungseinflusses über die niedrigste Näherung hinausgeht.

Abb. 4.5 veranschaulicht den Einfluß verschiedener Reibungsparameter. Außer bei sehr kleinen Wellenzahlen hat die Bodenreibung im Vergleich zur Horizontalreibung keinen erheblichen Einfluß auf die Gestalt der Übertragungsfunktion. Dagegen bedeutet der Fortfall der Horizontalreibung, daß die Dämpfung

Abb. 4.4:

Übertragungsfunktion
im endlichen Becken an
der Stelle $(x_1, x_2) =$
 $(.04L_1, .5L_2)$ bei der
Periode 25 d.

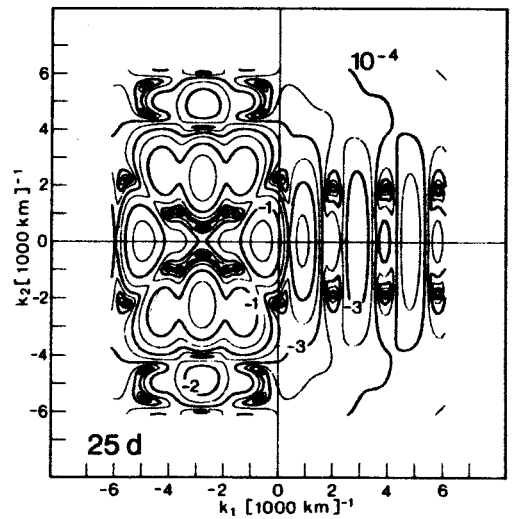
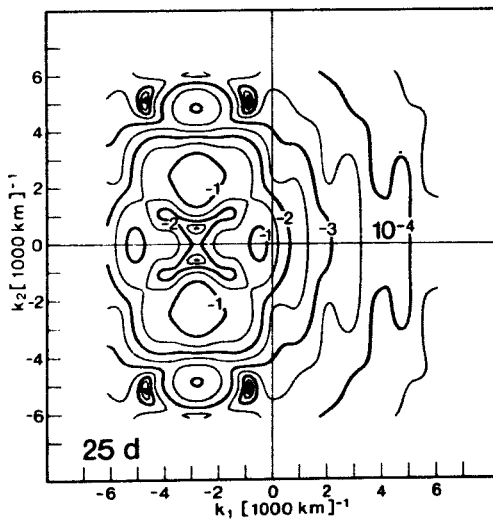
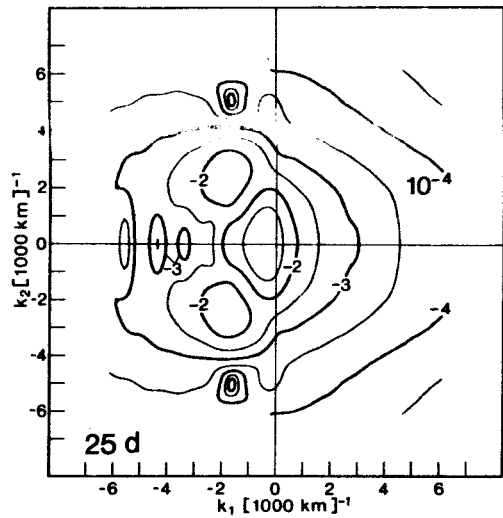


Abb. 4.5:

Übertragungsfunktion im Beckenzentrum für verschiedene Reibungs-
parameter

Links: $A = 1.5 \cdot 10^8 \text{ cm}^2/\text{s}$, $B = 0$

Rechts: $A = 0$, $B = 1.2 \cdot 10^{-7} \text{ s}^{-1}$

nicht mehr skalenselektiv ist, d.h. alle nach (4.10) möglichen Eigenschwingungen haben die gleiche Dämpfungszeit B^{-1} . Die ozeanische Reaktion ist daher in stärkerem Maße durch die freien Eigenschwingungen geprägt.

Abb. 4.6 zeigt die Übertragungsfunktionen der Massentransportkomponenten. Sie verhalten sich zu 4.3 im wesentlichen wie im unbegrenzten Gebiet Abb. 4.2 zu 4.1 mit der Ausnahme, daß $T_{M_2}(\underline{k}, \omega)$ für $k_1 = 0$ nicht verschwindet.

IV.6. Frequenzspektren des Massentransports und der Stromfunktion

Frequenzspektren für Massentransport und Stromfunktion lassen sich mit (4.41) berechnen, sobald das Frequenz-Wellenzahl-spektrum $F_a(\underline{k}, \omega)$ der atmosphärischen Anregung bekannt ist. Unter Vernachlässigung des Luftdruckeinflusses wählen wir gemäß (4.2)

$$F_a(\underline{k}, \omega) = \frac{1}{\rho_0^2} F_{\nabla \times \underline{u}}(\underline{k}, \omega) \quad (4.53)$$

wobei das Rotationsspektrum gemäß (2.17) aus der analytischen Form (2.22) bestimmt wird.

Die Integration von (4.41) über die Wellenzahlen wurde numerisch ausgeführt. Im abgeschlossenen Becken wurde über alle Wellenzahlen integriert, bei denen das Anregungsspektrum gemäß (2.23) nicht verschwindet. Im unbegrenzten Gebiet wurde die Integration dagegen auf Wellenzahlen $|k_\alpha| \geq \pi/L_\alpha$, d.h. $|k_1| \geq 0.5 \cdot 10^{-3} \text{ km}^{-1}$ und $|k_2| \geq 0.85 \cdot 10^{-3} \text{ km}^{-1}$ beschränkt. Macht man diese Beschränkung nicht, dann wird die ozeanische Reaktion entscheidend durch sehr lange Wellen beeinflusst, die in einem Becken von ozeanischer Dimension nicht auftreten können. Wegen des schon erwähnten, nahezu diskontinuierlichen Verhaltens von $T^\infty(\underline{k})$ war eine spezielle Integrationsmethode erforderlich, die in Anhang B dargestellt ist.

Abb. 4.7 zeigt Frequenzspektren der Stromfunktion sowie der

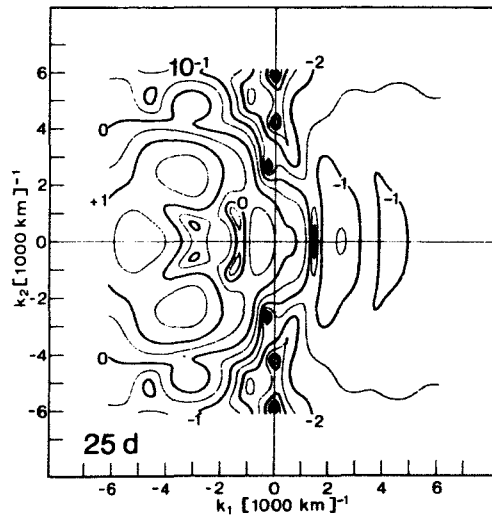
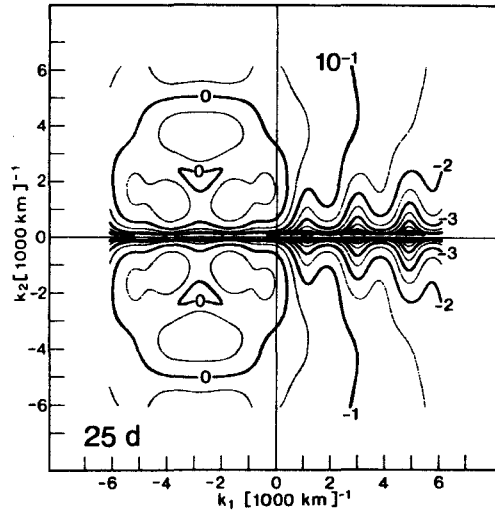


Abb. 4.6:

Isolinien der Übertragungsfunktion $T_{M1}(k, \omega)$ (oben) bzw. $T_{M2}(k, \omega)$ (unten) bei einer Periode von 25 d im Zentrum des abgeschlossenen Beckens.

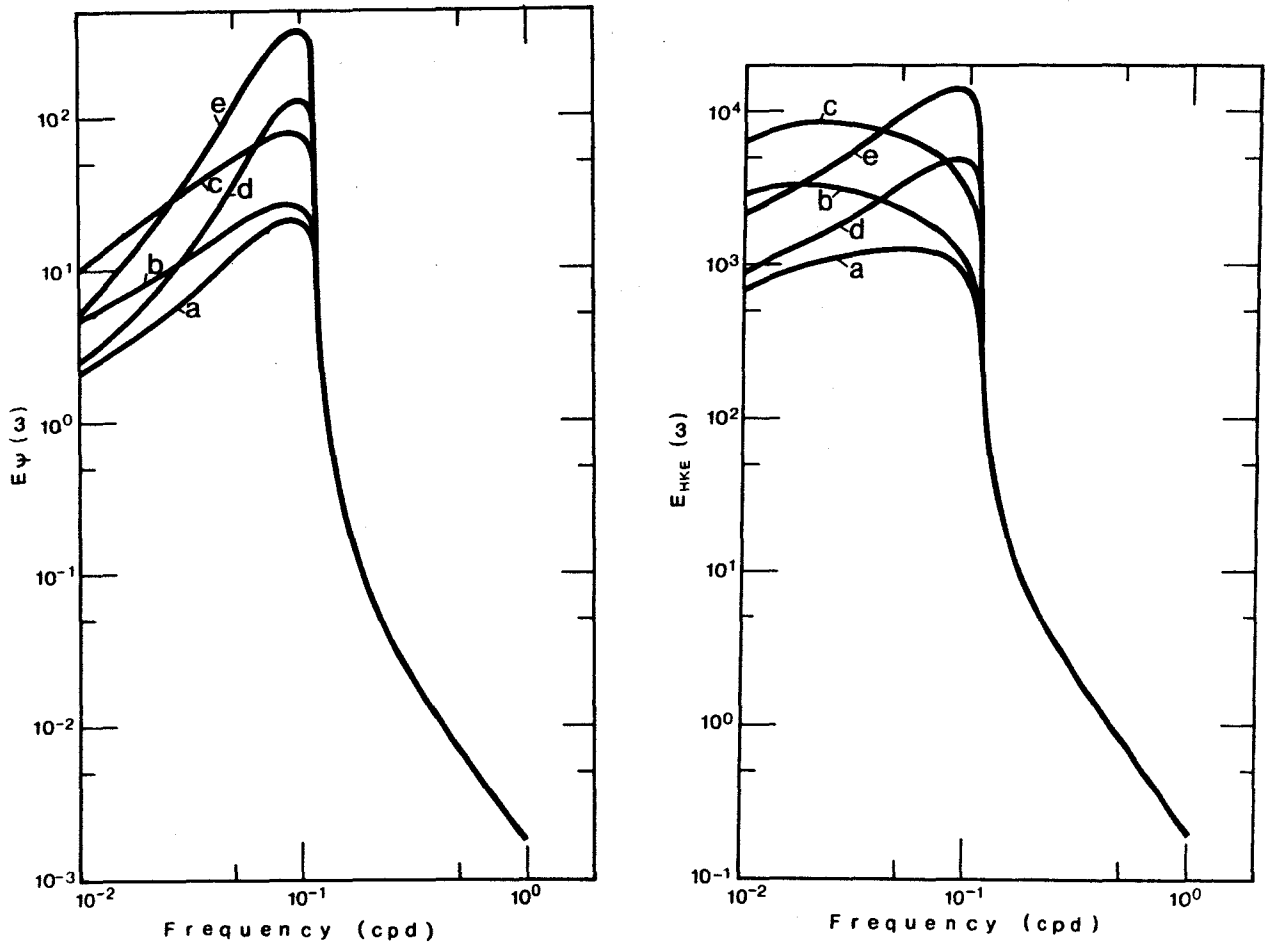


Abb. 4.7:

Frequenzspektren der Stromfunktion (links) und der horizontalen kinetischen Energie (rechts) im unbeschränkten Gebiet für verschiedene Reibungsparameter. Die Ordinateneinheiten sind dimensionslos.

- a) $A = 1.5 \cdot 10^8$, $B = 1.2 \cdot 10^{-7}$
- b) $A = 0$, $B = 1.2 \cdot 10^{-7}$
- c) $A = 0$, $B = 0.4 \cdot 10^{-7}$
- d) $A = 1.5 \cdot 10^8$, $B = 0$
- e) $A = 0.5 \cdot 10^8$, $B = 0$

horizontalen kinetischen Energie, $E_{HKE}(\omega) = \frac{1}{2}[E_{M_1}(\omega) + E_{M_2}(\omega)]$ für verschiedene Werte der Reibungsparameter A bzw. B im unbegrenzten Gebiet. Die oben besprochene Aufteilung in drei verschiedene Frequenzbereiche ist deutlich zu erkennen. Oberhalb von 0.3 cpd werden die Spektren unabhängig von der Reibung und sind proportional zu ω^{-2} , in Einklang mit (4.52). Im Resonanzbereich erfolgt eine sehr starke Zunahme der Energie zu größeren Perioden hin, bis zu einem Maximum bei einer Periode von 10 d. Das Maximum fehlt nur im Spektrum der horizontalen kinetischen Energie in den Fällen, in denen die Horizontalreibung keine Rolle spielt. Sowohl die Höhe des Maximums, als auch der Spektralverlauf zu tieferen Frequenzen hin sind entscheidend von Form und Größenordnung der Reibung abhängig.

Abb. 4.8 demonstriert den Einfluß der lateralen Ränder am Beispiel des Spektrums $E_\psi(\omega)$ im Zentrum des abgeschlossenen Gebiets. Am markantesten ist das scharfe Maximum bei etwa 10 d, es entspricht der Eigenperiode $m = n = 1$ (vgl. Tabelle 4.1). Weitere Maxima liegen bei Perioden von 15 bzw. 23 Tagen. Das Beckenzentrum ist insofern ein spezieller Ort, als gemäß (4.9) nur Eigenschwingungen, für die beide Indizes ungerade sind, von Null verschieden sein können. Wir identifizieren die letztgenannten Maxima daher mit den Indexpaaren (3.1) sowie (5.1) bzw. (1.3).

Spektren außerhalb des Beckenzentrums, die hier nicht wiedergegeben sind, weisen eine größere Anzahl von scharfen Maxima auf, in Übereinstimmung mit Tabelle 4.1. Dies Ergebnis ist jedoch etwas unrealistisch und beruht auf der approximativen Behandlung der Reibung. Die Eigenschwingungen (4.9) lassen sich ja als Überlagerung von zwei freien Wellen der Form (4.7) darstellen, mit den Wellenzahlen $k_1^\pm = -\beta/2\omega_{mn} \pm m\pi/L_1$ bzw. $k_2^\pm = \pm n\pi/L_2$. Für die Durchquerung des Beckens in Ost-West-Richtung benötigt eine Wellengruppe die Zeit $T_{prop} = L_1/|2\Omega/\partial k_1|$. Für die Dissipationszeit T_{diss} erhält man aus (4.1)

Abb. 4.8:

Vergleich der Frequenzspektren der Stromfunktion im unbeschränkten Gebiet (a) und im abgeschlossenen Becken (b).

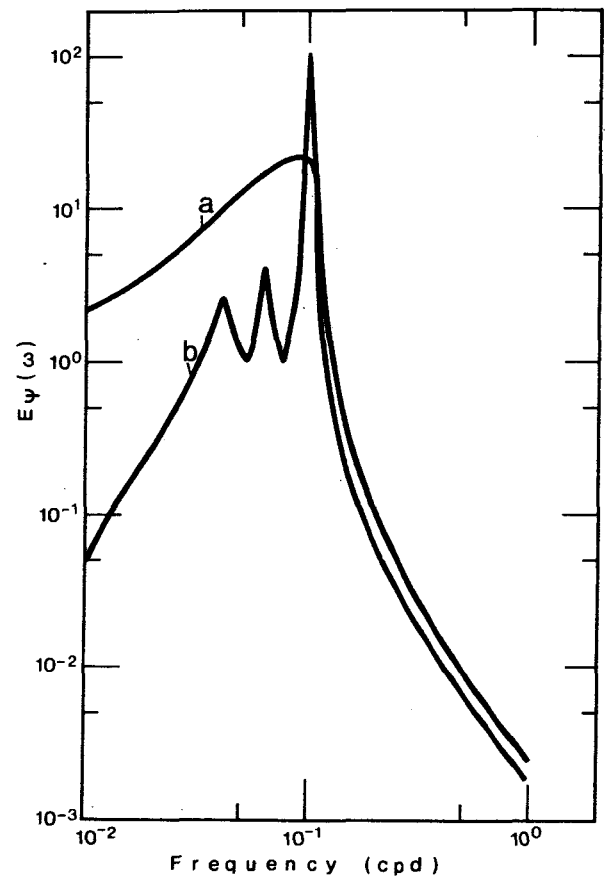
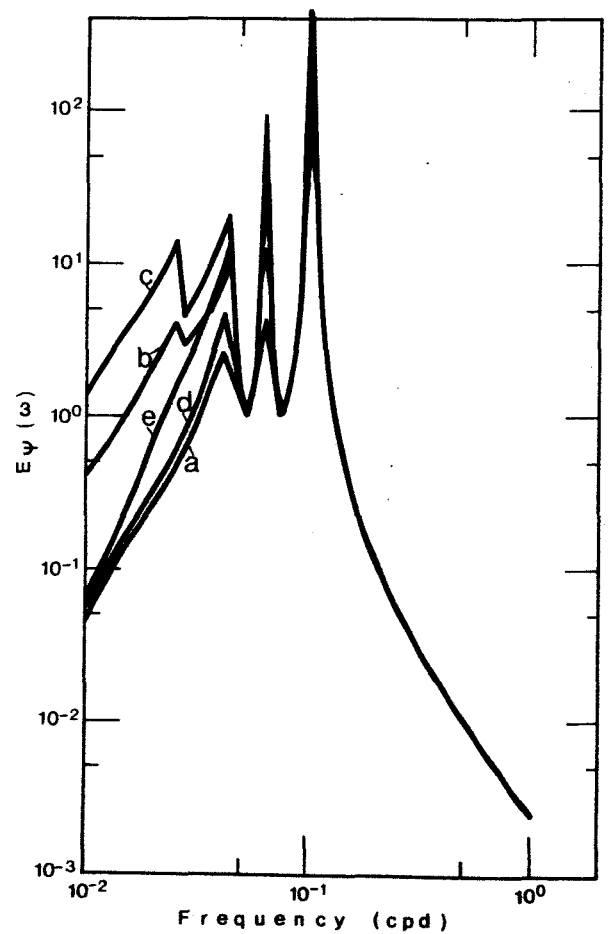


Abb. 4.9:

Frequenzspektren der Stromfunktion im abgeschlossenen Becken. Reibungsparameter wie in Abb. 4.7.



$$T_{diss} = \frac{2(Bk^2 + Ak^4)}{k^2 + f_0^2/gH_0} \quad (4.54)$$

Das Verhältnis beider Zeiten ergibt sich mit (4.8) zu

$$\frac{T_{diss}}{T_{prop}} = \frac{\beta |k_1^2 - k_2^2 - f_0^2/gH_0|}{2L_1(k^2 + f_0^2/gH_0)(Bk^2 + Ak^4)} \quad (4.55)$$

und ist in Tabelle 4.1 für die Komponente mit ostwärts gerichteter Gruppengeschwindigkeit angegeben. Nur wenn T_{diss}/T_{prop} hinreichend groß ist, kann man erwarten, daß die Eigenschwingungen identifizierbar bleiben. Die Tatsache, daß in Abb. 4.8 Resonanzperioden auftreten, für die dieses Verhältnis erheblich unterhalb von 1 liegt, weist darauf hin, daß zu langen Perioden hin die Approximation (4.21) weniger gut wird. Insbesondere wird auch für $\omega \rightarrow 0$ nicht das korrekte asymptotische Verhalten erreicht (Unabhängigkeit von der Frequenz). Die Gründe hierfür sind oben bereits dargelegt worden. Es bleibt festzuhalten, daß die Näherungslösung (4.34) nur für Perioden unterhalb von $O(20)$ Tagen brauchbar ist.

Bei höheren Frequenzen ist der Spektralverlauf im abgeschlossenen Becken sehr ähnlich wie im unbegrenzten Gebiet, liegt jedoch um ca. 40 % höher. Dies ist darauf zurückzuführen, daß im unbegrenzten Gebiet der Wellenzahlbereich $|k_\alpha| \leq \pi/L_\alpha$ aus den oben erwähnten Gründen von der Integration ausgeschlossen wurde.

Abb. 4.9 zeigt den Einfluß der Reibung auf die Spektren im abgeschlossenen Becken. Grundsätzlich sind die Verhältnisse ähnlich wie in Abb. 4.7a. Insbesondere zeigt sich, daß die Anzahl der Resonanzstellen anwächst, wenn keine Horizontalreibung vorhanden ist, im Einklang mit den bei der Diskussion der Übertragungsfunktion getroffenen Feststellungen.

IV.7. Korrelation zwischen ozeanischen und atmosphärischen Variablen

In diesem Abschnitt wird die Frage untersucht, inwieweit die kausale Beziehung, die gemäß dem oben beschriebenen analytischen

Modell zwischen atmosphärischen und ozeanischen Variablen besteht, zu einer lokalen Korrelation dieser Variablen führt. Eine solche Korrelation ist ja auf einfache Weise aus lokalen Beobachtungen zu bestimmen, und diese Frage hat große Bedeutung für die Auswertung und Interpretation ozeanographischer Daten. Wir beschränken uns hier auf den Fall des unendlich ausgedehnten Gebietes, da die Berücksichtigung lateraler Berandungen keine wesentlich neuen Gesichtspunkte ergibt.

Zunächst wollen wir den Zusammenhang zwischen Massentransport und Schubspannung betrachten. Ausgehend von (4.13) und (4.2) (bei Vernachlässigung des Luftdruckterms) erhalten wir für die Fourier-Amplituden die Beziehung

$$M_{\alpha}(\underline{k}) = -i H_{\alpha\beta}(\underline{k}) \tau_{\beta}(\underline{k}) / \mathcal{D}_{\underline{k}} \quad (4.56)$$

(Index ω unterdrückt).

Dabei ist

$$H_{\alpha\beta}(\underline{k}) = k^2 \delta_{\alpha\beta} - k_{\alpha} k_{\beta} \quad (4.57)$$

Wie in Kap. II.4 erläutert, ist es aus Gründen der algebraischen Einfachheit zweckmäßig, an Stelle von τ_{α} die Schubspannungskomponenten τ'_{α} in einem um den Winkel ϕ_g gedrehten Koordinatensystem zu betrachten, während Schubspannung und Wellenzahl im alten Koordinatensystem bleiben. Aus (4.56) folgt dann

$$M_{\alpha} = -i H_{\alpha\beta} Z_{\beta\mu} \tau'_{\mu} / \mathcal{D}_{\underline{k}} \quad (4.58)$$

wobei die Drehmatrix Z durch

$$Z_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} \cos \phi_g - \epsilon_{\alpha\beta 3} \sin \phi_g \quad (4.59)$$

gegeben ist.

Mit den Definitionen (A9) und A10) ergibt sich dann für das Kreuzspektrum $A_{M_{\alpha}\tau'_{\beta}}(\omega)$ zwischen Massentransportkomponente M_{α} und Schubspannungskomponente τ'_{β} die Beziehung

$$A_{M_\alpha \tau'_\beta}(\omega) = -i \int d\underline{k} G_{\alpha\beta}(\underline{k}) / D_{\underline{k}} \quad (4.60)$$

mit

$$G_{\alpha\beta}(\underline{k}) = H_{\alpha\mu}(\underline{k}) Z_{\mu\nu} F_{\tau'_\nu \tau'_\beta}(\underline{k}) \quad (4.61)$$

Ist der Spektraltensor der Schubspannung bekannt, so kann (4.60) analog zu (4.41) numerisch ausgewertet werden; anschließend kann gemäß (A5), (A6) Kohärenz und Phasendifferenz zwischen den Variablen berechnet werden. Es zeigt sich nun aber, daß man auch ohne numerische Auswertung von (4.60) bereits zu weitgehenden Aussagen kommen kann, wenn man gewisse Symmetrieeigenschaften des Integranden von (4.60) berücksichtigt. In Kap. II war ja gezeigt worden, daß die Luftdruckfluktuationen näherungsweise symmetrisch hinsichtlich der Nord-Süd-Richtung sind. Daraus folgte, daß die Schubspannungsfluktuationen zwar nicht streng symmetrisch, aber doch pseudosymmetrisch sind, d.h. gemäß (2.19) gilt

$$F_{\tau'_\alpha \tau'_\beta}(k_1, -k_2) = (-1)^{\alpha+\beta} F_{\tau'_\alpha \tau'_\beta}(k_1, k_2) \quad (4.62)$$

in den gedrehten Koordinaten. Die Diagonalelemente von $F_{\tau'_\alpha \tau'_\beta}$ sind also gerade, die Nicht-Diagonalelemente ungerade Funktionen von k_2 . Betrachtet man nun etwa das Kreuzspektrum zwischen der Ostkomponente M_1 und τ'_2 , also ungefähr der Nordkomponente von τ , so erhält man aus (4.61)

$$G'_{12}(\underline{k}) = \cos \varphi_g \left[k_2^2 F_{\tau'_1 \tau'_2} - k_1 k_2 F_{\tau'_2 \tau'_1} \right] - \sin \varphi_g \left[k_2^2 F_{\tau'_2 \tau'_2} + k_1 k_2 F_{\tau'_1 \tau'_1} \right] \quad (4.63)$$

Unter Berücksichtigung von (4.60) ist demnach der Koeffizient von $\cos \varphi_g$ in (4.62) ungerade in k_2 , der von $\sin \varphi_g$ gerade. Da auch $D_{\underline{k}}$ gemäß (4.14) gerade ist, bleibt von dem Integral (4.60)

nur ein zu $\sin\phi_g$ proportionaler Beitrag nichtverschwindend. Ist darüber hinaus aber (2.19) erfüllt, dann verschwindet der Koeffizient von $\sin\phi_g$ identisch, und damit auch das Kreuzspektrum $A_{M_1\tau_2}'(\omega)$. Diese Aussage gilt für alle Frequenzen. Entsprechendes gilt auch für $A_{M_2\tau_1}'(\omega)$. Allein aufgrund der Symmetrieeigenschaften der atmosphärischen Fluktuationen und der Gültigkeit von (2.19) sind also zueinander nahezu orthogonale Komponente von Wind und Massentransport unkorreliert, unabhängig von der Form des Wellenzahlspektrums.

Ein weniger allgemeines Ergebnis ergibt sich für die Korrelation nahezu paralleler Komponenten. So erhält man z.B. für die Kombination $M_1-\tau_1'$

$$G_{11}(k) = \cos\phi_g [k_2^2 F_{\tau_1'\tau_2'} - k_1 k_2 F_{\tau_1'\tau_2'}] - \sin\phi_g [k_2^2 F_{\tau_1'\tau_2'} + k_1 k_2 F_{\tau_1'\tau_2'}] \quad (4.64)$$

Jetzt ist der Koeffizient von $\sin\phi_g$ ungerade in k_2 und trägt daher nichts zum Integral (4.60) bei. Der Koeffizient von $\cos\phi_g$ ist gerade und bei Berücksichtigung von (2.19) sogar stets positiv.

Betrachtet man nun zunächst tiefe Frequenzen im Bereich des Sverdrup-Gleichgewichts, so läßt sich D_k gemäß (4.51) approximieren als

$$D_k = -\beta k_1 - i R_k \quad (4.65)$$

Soweit man die Reibung vernachlässigen kann, ist also D_k ungerade in k_1 . Wegen der Ost-West-Symmetrie bei tiefen Frequenzen ist der Koeffizient von $\cos\phi_g$ in (4.64) gerade in k_1 , und damit verschwindet $A_{M_1\tau_1}'(\omega)$ hier, ebenso wie auch $A_{M_2\tau_2}'(\omega)$. Bei niedrigen Frequenzen sind also auch die parallelen Komponenten von Wind und Strömung unkorreliert, wobei die Ursache hier, neben der Symmetrie im Windfeld, in der starken Anisotropie der ozeanischen Reaktion zu suchen ist.

Auch im Resonanzbereich erwartet man keinerlei lokale Kohärenz

zwischen atmosphärischen und ozeanischen Variablen. Das liegt daran, daß in diesem Bereich lokal erzeugte Strömungsschwankungen als Rossby-Wellen propagieren, und daher sind Ozean und Atmosphäre nicht lokal miteinander verknüpft. Diese Aussage läßt sich (für schwache Reibung) auch formal aus (4.60) und (4.64) herleiten, worauf hier aber verzichtet wird.

Damit verbleibt nur der Bereich der hochfrequenten erzwungenen Oszillationen, also der Periodenbereich von 1-10 d, in welchem wir Korrelation zwischen parallelen Komponenten von Wind und Strömung erwarten können. Mit Hilfe von (2.19) läßt sich auch hier eine Näherung angeben, die unabhängig von der Form des Luftdruckspektrums ist. Aus (4.60) und (4.64) erhält man für das Kreuzspektrum die Darstellung

$$A_{M, \tau_1}(\omega) = -i \lambda^2 \cos \varphi_g \int d\underline{k} k_z^2 k^2 F_p(\underline{k}) / D_{\underline{k}} \quad (4.66)$$

Die Energiespektren von M_1 bzw. τ_1^1 ergeben sich aus (4.56) bzw. (2.19) zu

$$E_{M_1}(\omega) = \lambda^2 \cos^2 \varphi_g \int d\underline{k} k_z^2 k^4 F_p(\underline{k}) / |D_{\underline{k}}|^2 \quad (4.67)$$

$$E_{\tau_1^1}(\omega) = \lambda^2 \int d\underline{k} k_z^2 F_p(\underline{k}) \quad (4.68)$$

Approximiert man nun analog zu (4.52) $D_{\underline{k}} = -\omega k^2$, so werden die Integranden in (4.66-68) identisch, und daher ist die gemäß (A5) definierte Kohärenz $\gamma_{M_1 \tau_1^1}(\omega) \equiv 1$, unabhängig von der Form des Luftdruckspektrums. Die Phasendifferenz ergibt sich aus (A6) zu $\phi_{M_1 \tau_1^1}(\omega) = -\pi/2$, d.h. die Schubspannung führt mit 90° vor der Strömung.

Abb. 4.10 zeigt die durch numerische Integration von (4.60) mit dem Spektrum (2.22), (2.23) berechnete Kohärenz und Phase. Die vorausgegangenen qualitativen Überlegungen werden durch Abb. 4.10 vollauf bestätigt. Bemerkenswert ist insbesondere der rapide Abfall der Kohärenz bei der Periode von 10 d, also beim Einsetzen der Resonanz. Bei tiefen Frequenzen ist

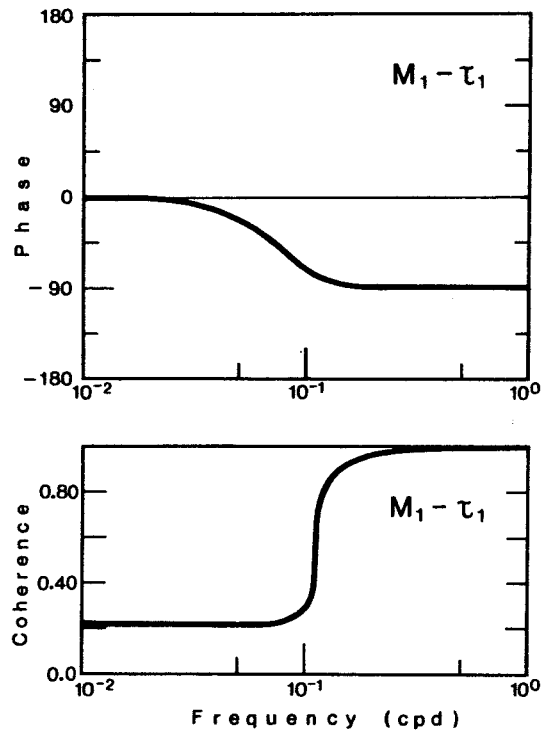


Abb. 4.10:

Kohärenz und Phasendifferenz zwischen Ostkomponente M_1 des Massentransports, und der um den Winkel ϕ_g gedrehten Komponente τ_1' der Schubspannung. Berechnet durch numerische Integration von (4.66) - (4.68) mit dem Modellspektrum (2.22).

$\gamma_{M_1 \tau_1'}(\omega) \approx 0.2$, ein Wert, der von den Reibungsparametern abhängt und bei schwächerer Reibung noch kleiner wird.

Ganz analoge Verhältnisse wie für die Korrelation $M_1 - \tau_1'$ ergeben sich auch für die Kombination $M_2 - \tau_2'$ sowie $\Psi - p$, worauf nicht weiter eingegangen wird. Stattdessen betrachten wir noch die Kombination $M_2 - p$. Für das Kreuzspektrum ergibt sich hier

$$A_{M_2 p}(\omega) = \lambda \cos \varphi_g \int d\underline{k} \, k_1 k^2 F_p(\underline{k}) / \mathcal{D}_{\underline{k}} \quad (4.69)$$

Die zugehörigen Energiespektren sind

$$E_{M_2}(\omega) = \lambda^2 \cos^2 \varphi_g \int d\underline{k} \, k_1^2 k^4 F_p(\underline{k}) / |\mathcal{D}_{\underline{k}}|^2 \quad (4.70)$$

$$E_p(\omega) = \int d\underline{k} \, F_p(\underline{k}) \quad (4.71)$$

Für $\mathcal{D}_{\underline{k}} = -\omega k^2$, d.h. bei hohen Frequenzen, erhält man daraus

$$\gamma_{M_2 p}(\omega) = \overline{k_1} (\overline{k^2})^{-1/2} \quad (4.72)$$

für niedrige Frequenzen ($\mathcal{D}_{\underline{k}} = -\beta k_1$) dagegen

$$\gamma_{M_2 p}(\omega) = \overline{k^2} (\overline{k^4})^{-1/2} \quad (4.73)$$

Gemäß (2.11) bzw. Abb. 2.7 kann bei einer Periode von 3 Tagen, also im Bereich maximaler Ost-West-Unsymmetrie der Atmosphäre, die Kohärenz (4.72) den Maximalwert $\gamma_{M_2 p} \approx 0.7$ annehmen. Für (4.73) erhält man mit dem Spektrum (2.23)

$$\gamma_{M_2 p}(\omega) \approx \left(\frac{4}{3} \frac{k_b}{k_c} \right)^{1/2} \ll 1 \quad (4.74)$$

Zusammenfassend stellen wir fest, daß der kausale Zusammenhang zwischen atmosphärischen und ozeanischen Variablen nur in wenigen Fällen zu lokalen Korrelationen führt, die deutlich von Null verschieden sind und daher leicht zu beobachten wären. Insbesondere bei tiefen Frequenzen wird man in der Regel keine signifikante Kohärenz erwarten können.

V. NUMERISCHE INTEGRATION DER BEWEGUNGSGLEICHUNGEN

V.1. Das numerische Modell

Die Resultate des vorigen Kapitels wurden unter sehr idealisierten Voraussetzungen gewonnen. Diese betrafen die Linearität der Bewegungsgleichungen, die stark vereinfachte Struktur der atmosphärischen Anregung (z.B. Stationarität und Homogenität) und die idealisierte Geometrie bzw. Topographie des Ozeans. Außerdem war für das abgeschlossene Becken eine Approximation benutzt worden, deren Gültigkeit auf Perioden unterhalb von etwa 20 Tagen beschränkt war.

Will man von diesen Einschränkungen abgehen, so kommt man mit analytischen Methoden nicht mehr wesentlich weiter, und es wird erforderlich, zu einer numerischen Lösung der Bewegungsgleichungen überzugehen.

Grundsätzlich eignen sich hierzu sowohl die primitiven Gleichungen (3.6) als auch die quasigeostrophische Approximation (3.17). Der wesentliche Unterschied zwischen den beiden Modellen ist, neben den in (3.17) explizit vorgenommenen geometrischen Approximationen, die Tatsache, daß in (3.6) zusätzlich zu den planetarischen Wellen noch Trägheits-Schwerewellen enthalten sind, die für das vorliegende Problem von geringem Interesse sind. Ein Vergleich von numerischen Lösungen beider Modelle unter gleichen äußeren Bedingungen (SEMTNER & HOLLAND, 1978) ergab weitgehende Übereinstimmung im niederfrequenten Bereich.

In WILLEBRAND et al (1980, im folgenden mit II bezeichnet) wurden die Gleichungen (3.6) mit Hilfe eines Differenzverfahrens numerisch gelöst. Die wichtigsten Ergebnisse werden im folgenden dargestellt und mit den Resultaten von Kap. IV verglichen. Drei verschiedene Gebiete wurden betrachtet:

a) Ein idealisiertes Ozeanbecken mit ebenem Boden (Wassertiefe $H_0 = 4$ km), welches sich zwischen den Längen- bzw. Breitengraden 100° W - 180° W sowie 20° N - 60° N erstreckt.

- b) Ein idealisiertes Becken wie unter 1), jedoch zwischen 0° W - 80° W sowie 25° N - 60° N.
- c) Ein Gebiet, welches hinsichtlich seiner Geometrie und Topographie dem Nordatlantik zwischen 25° N und 60° N entspricht (vgl. Abb. 5.8a unten).

Als antreibende Kraft wurde die gemäß (2.1) - (2.3) aus den NMC-Wetterkarten des jeweiligen Gebietes berechnete Windschubspannung benutzt. Allerdings wurden nur die Abweichungen der Schubspannung von ihrem (zeitlichen) Mittelwert betrachtet. Auf diese Weise wird vermieden, daß sich eine mittlere Zirkulation aufbaut, die möglicherweise instabil wäre und daher Fluktuationen erzeugen könnte, die von den direkt winderzeugten Fluktuationen nicht mehr zu trennen wären.

Die Modelle a) und b) unterscheiden sich, abgesehen von der geringfügig verschiedenen Breitenausdehnung, nur durch das Windfeld, welches dem des Nordpazifik bzw. Nordatlantik entspricht. Wie in I gezeigt, sind die statistischen Eigenschaften der Windschwankungen über beiden Ozeanen sehr ähnlich. Die Ergebnisse der numerischen Integration unterscheiden sich ebenfalls nur in unwesentlichen Details. Beide Fälle werden daher gemeinsam diskutiert.

Das Differenzverfahren zur Lösung von (3.6) entspricht, mit Ausnahme der Kugelgeometrie und der Form der Reibung, dem Modell von BLUMBERG (1977), aus welchem es entwickelt worden ist. Zeitliche Ableitungen sind durch zentrale Differenzenquotienten 2. Ordnung approximiert. Zur Vermeidung numerischer Instabilität sind die Reibungsterme in (3.6a,b) um einen Zeitschritt zurückversetzt (vgl. MESINGER & ARAKAWA, 1976). Auch alle räumlichen Ableitungen werden durch zentrale Differenzenquotienten ersetzt. Allerdings wird aus Gründen der Rechenökonomie ein verschachteltes Gitter benutzt, d.h. die drei Variablen M_1 , M_2 , ζ sind an verschiedenen Gitterpunkten definiert. Dadurch ergeben sich gewisse Modifikationen an den Differenzengleichungen; insbesondere müssen auch solche Terme der Bewegungsgleichungen, die keine horizontale Ableitung enthalten, approximativ dargestellt werden (z.B. Coriolis-term).

Als Gitterweite wird $\Delta\lambda = 1^\circ$ und $\Delta\theta = 0.7^\circ$ (1° im Fall a) gewählt, entsprechend einem horizontalen Abstand von etwa 70-80 km. Der Zeitschritt ist $\Delta t = 100$ sec. Dieser Wert ist sehr klein, sowohl im Vergleich zur Zeitskala der untersuchten Phänomene als auch im Vergleich zur zeitlichen Auflösung des Windfeldes (12 h). Er ergibt sich größenordnungsmäßig als Zeitraum, in dem eine Schwerewelle die Entfernung zwischen zwei Gitterpunkten zurücklegt; ein sehr viel größerer Wert von Δt würde das Differenzenverfahren numerisch instabil machen (COURANT et al, 1928). Die große Rechenzeit, die sich als Folge des kleinen Zeitschrittes ergibt, ist der Preis für die Benutzung der Bewegungsgleichungen (3.6). Numerische Integration von (3.17) würde unter den gleichen Verhältnissen einen Zeitschritt von einigen Stunden erlauben, als Folge der sehr viel kleineren Phasengeschwindigkeit der planetarischen gegenüber den Schwerewellen.

Die Differenzgleichungen wurden mit den Anfangsbedingungen $M_1 = M_2 = \zeta = 0$ und den Randbedingungen $M_1 = M_2 = 0$ für einen Zeitraum von 4 Jahren integriert. Für die weitere Analyse der Lösung wurden Tagesmittelwerte gebildet. Dadurch wurden Trägheits- und Schwerewellen weitgehend aus der Lösung eliminiert. Das Ergebnis der numerischen Integration wurde aus den in der Einleitung erwähnten Gründen als Realisierung eines stochastischen Prozesses angesehen. Für die Berechnung von Erwartungswerten wurde stets das zeitliche Mittel verwendet.

Die hier beschriebenen Läufe des Modells hatten die Reibungsparameter $A_H = 5 \cdot 10^7 \text{ cm}^2/\text{s}$ und $B = 0$. Außerdem wurde in (3.6a,b) der direkte Luftdruckeinfluß vernachlässigt. Weitere Läufe mit anderen Werten der Reibungsparameter sowie mit Einschluß des Luftdrucks als antreibender Kraft wurden durchgeführt. Sie entsprachen in allen Punkten qualitativ den Feststellungen von Kap. IV über die Bedeutung von Reibung und Luftdruck; auf eine Wiedergabe der Ergebnisse wird daher verzichtet.

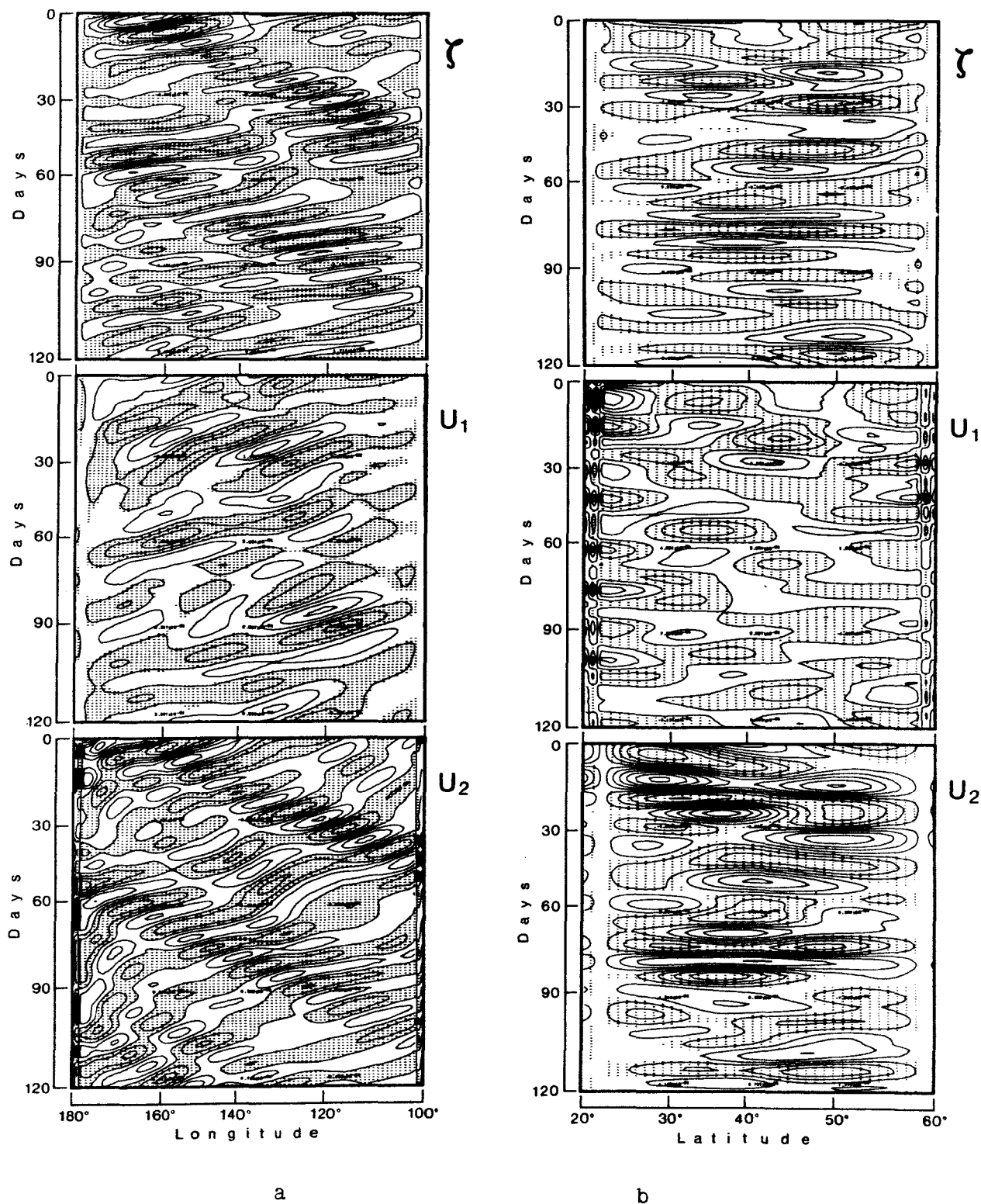


Abb. 5.1:

Isolinien der Feldgrößen als Funktion von Zeit und Länge (a) bzw. Breite (b) für die Dauer von 4 Monaten.

V.2. Lösung im rechteckigen Becken

Einen Eindruck von der typischen raumzeitlichen Struktur der Lösung vermittelt Abb. 5.1. In Abb. 5.1a sind die Isolinien von Oberflächenauslenkung ζ und vertikal gemittelter Geschwindigkeit $\bar{U} = \bar{M}/H_0$ als Funktion von Zeit und Längengrad bei $\theta = 40^\circ$ dargestellt für die Dauer von 4 Monaten. Hervortretendes Merkmal ist die Schrägstellung der Isolinien, die nahezu immer und an allen Orten eine westwärts gerichtete Phasenausbreitung anzeigt. Als typische Phasengeschwindigkeit ergibt sich ein Wert von 3-5 m/s. Die dominante Periode der Schwankungen liegt bei etwa 10 Tagen. Weiterhin sind Wellengruppen zu erkennen, die vom westlichen Rand ausgehen und mit einer Geschwindigkeit von $O(1)$ m/s nach Osten wandern. Dies Verhalten ist besonders ausgeprägt in den Feldern ζ und U_2 , weniger in U_1 .

Abb. 5.1b zeigt die entsprechende Darstellung als Funktion von Zeit und Breitengrad bei $\lambda = 140^\circ$ W. Wesentlicher Unterschied zu Abb. 5.1a ist das Fehlen einer klar bevorzugten Ausbreitungsrichtung, sowohl hinsichtlich der Phasen wie auch von Wellengruppen. Die Amplituden der Schwankungen liegen bei ~ 10 cm für die Oberflächenauslenkung und bei ~ 3 cm/s für die Geschwindigkeit.

Einen erheblich genaueren Einblick in die Ausbreitungseigenschaften geben die Kohärenz- und Phasendiagramme von Abb. 5.2. Aus den Phasendifferenzen für Ost-West-Separation (Abb. 5.2a) ergibt sich, daß westwärts gerichtete Phasenausbreitung bei allen Perioden im Bereich der Rossby-Wellen vorherrschend ist. Bei sehr langen Perioden, etwa ab 50 d, geht die Phasendifferenz jedoch allmählich auf Null zurück. Hier findet der Übergang in das Sverdrup-Regime statt, und die Übertragungsfunktionen (4.42) werden symmetrisch hinsichtlich der Ost-West-Wellenzahl. Bei sehr kurzen Perioden (< 5 d) ändert die Phase ihr Vorzeichen, und die atmosphärisch induzierte Ausbreitung nach Osten dominiert hier. Wegen der sehr kleinen Amplituden ist dies in Abb. 5.1a nicht zu erkennen.

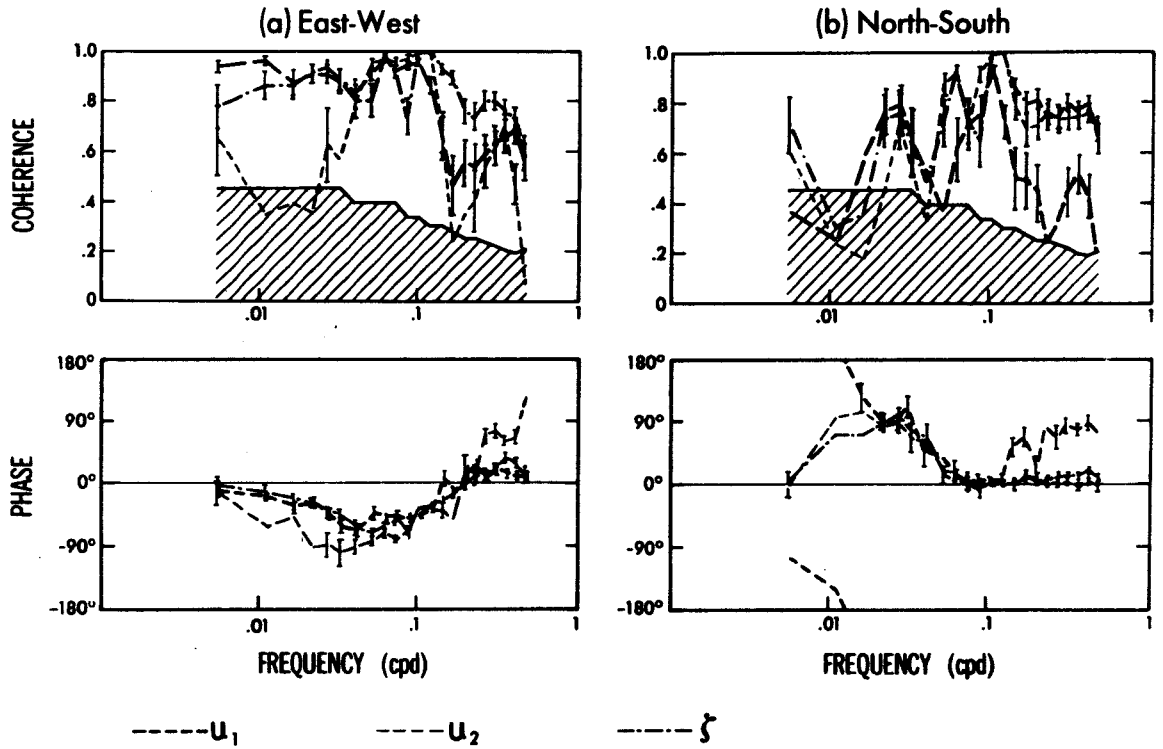


Abb. 5.2:

Kreuzspektren der ozeanischen Variablen zwischen zwei Orten in der Nähe des Beckenzentrums nach II.

(a) Ost-West Separation 495 km

(b) Nord-Süd Separation 620 km

Positive Phase bei Fortpflanzung nach Osten bzw. Norden.

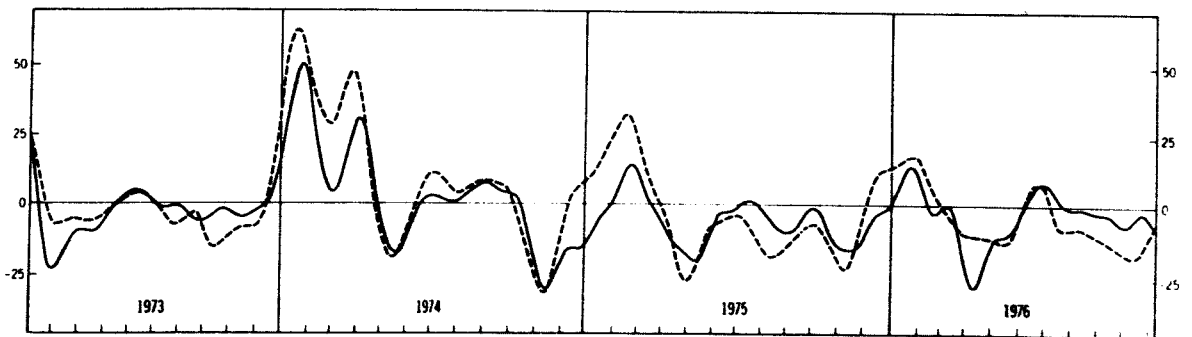


Abb. 5.3:

Ausgezogene Kurve: Zeitlicher Verlauf des Volumentransports im westlichen Randstrom nach II.

Gestrichelte Kurve: Integrierter Sverdrup-Transport gemäß (5.2).

Einheit in m^3/s .

Die Phasendifferenzen bei Nord-Süd-Separation (Abb. 5.2b) stimmen nur im Periodenbereich um 10 d mit der aus Abb. 5.1b gefundenen Symmetrie hinsichtlich der Nord-Süd-Ausbreitung überein. Besonders bei längeren Perioden, in geringem Maße auch bei kürzeren Perioden, ergibt sich Bevorzugung der Phasenausbreitung nach Norden. Diese Asymmetrie ist wahrscheinlich eine Folge der Tatsache, daß die Amplitude des Windfeldes in der nördlichen Beckenhälfte am größten ist (vgl. Abb. 2.1). Dort ist demnach die Erzeugung von Wellen am effektivsten. Daher erwarten wir im Beckenzentrum einen Überschuß von Wellen mit südwärts gerichteter Gruppengeschwindigkeit, was nach der Dispersionsrelation (4.8) Phasenausbreitung nach Norden entspricht. Der Betrag dieser Unsymmetrie hängt von der Stärke der Reibung ab. Er ist um so größer, je wirksamer die Reibung ist, und daher bei den kurzen Rossby-Wellen am meisten ausgeprägt.

In Kap. IV wurde die spektrale Form des Sverdrup-Gleichgewichts eingeführt, welches eine Approximation bei tiefen Frequenzen darstellt (vgl. (4.51)). Im Orts-Zeitraum lautet die entsprechende Approximation aus (4.1)

$$\beta \partial \psi / \partial x_1 = a(x, t) \quad (5.1)$$

Integriert man nun (5.1) längs eines Breitenkreises über das Becken, mit Ausnahme einer dünnen Reibungsgrenzschicht der Dicke d am westlichen Rand so ergibt sich unter Beachtung der Randbedingungen $\psi = 0$ sowie der Definition von M

$$- \int_0^d M_2 dx_1 = \frac{1}{\beta} \int_0^{L_1} a(x, t) dx_1 \quad (5.2)$$

d.h. der meridionale Transport in der Grenzschicht ergibt sich aus dem Integral über die atmosphärische Anregungsfunktion.

Abb. 5.3 gibt ein anschauliches Bild davon, wie gut die numerische Lösung der Approximation (5.2) genügt. Für die Berechnung der Kurven in Abb. 5.3 ist die Grenzschichtdicke zu $d = 300$ km angenommen; außerdem sind beide Zeitreihen tiefpaßgefiltert,

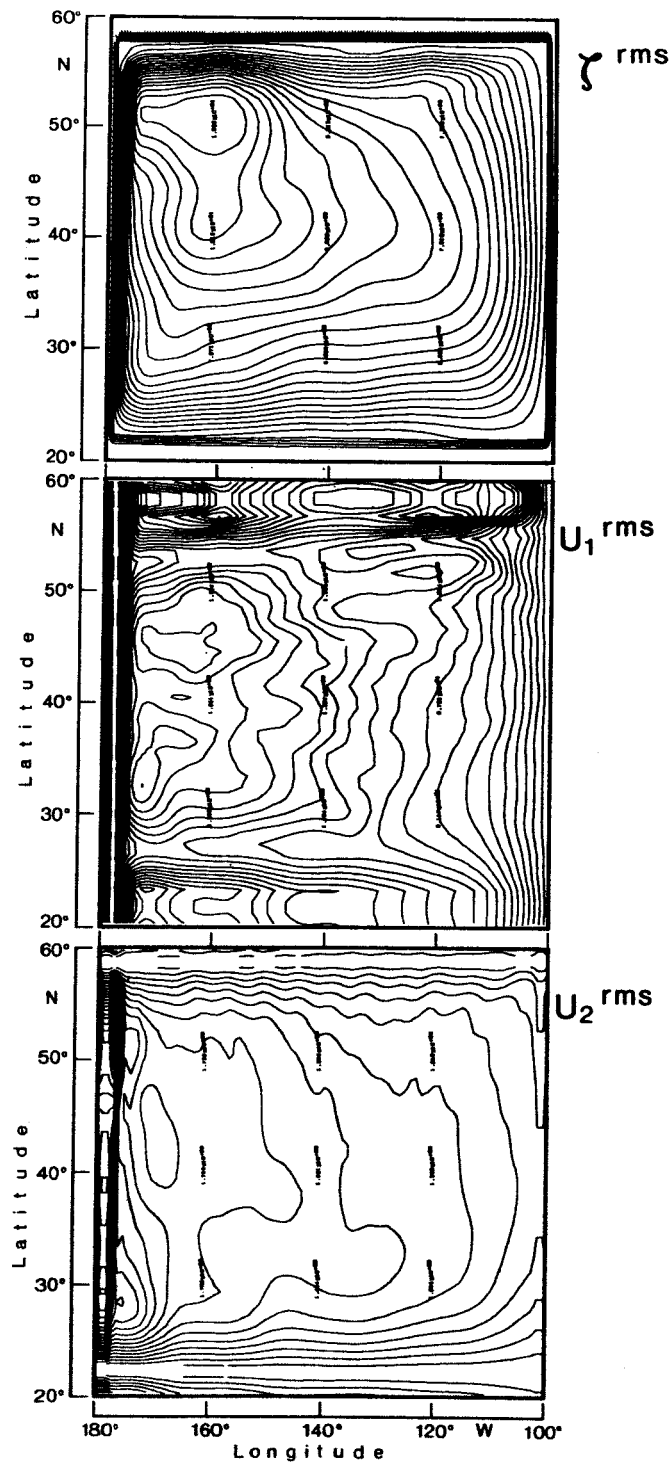


Abb. 5.4:

Horizontale Verteilung der mittleren quadratischen Amplitude.
Isolinienintervalle:
0.5 cm (ζ), 0.1 cm/s (U_1), 0.2 cm/s (U_2)

wodurch Perioden unterhalb von 20 d unterdrückt werden. Beide Kurven zeigen ein hohes Maß an Übereinstimmung. Die bestehenden Abweichungen sind auf kurze Rossby-Wellen mit ostwärts gerichteter Gruppengeschwindigkeit zurückzuführen, für die (5.1) keine gute Approximation darstellt.

Abb. 5.4 zeigt die räumliche Verteilung der mittleren quadratischen Amplitude der drei fluktuierenden Felder. Typische Werte sind 5-10 cm für die Oberflächenauslenkung und 1-2 cm/s für die Horizontalgeschwindigkeit. Die Verteilungen haben nicht sehr viel Ähnlichkeit mit der Verteilung der Wind-Amplitude über dem Nordpazifik. Insbesondere deutet das Energiemaximum im westlichen Teil des Beckens auf dominierend nichtlokale Vorgänge hin. Bemerkenswert ist auch der sehr viel glattere Verlauf der Verteilung für ζ gegenüber u . Dies deutet darauf hin, daß ζ im allgemeinen größere Horizontalskalen hat als die Horizontalgeschwindigkeit.

Bei der Betrachtung der Abb. 5.4, ebenso wie auch bei Abb. 5.1 sowie 5.7 unten, fällt ein eigenartiges Verhalten in der Nähe des Randes auf. Dies gilt insbesondere für Darstellungen von U_1 , U_2 . Der Grund dafür liegt in der diskreten Formulierung der Randbedingungen in Kombination mit der Benutzung eines verschachtelten Gitters. Die jeweils ein bzw. zwei äußersten Gitterpunkte in diesen Abbildungen liegen tatsächlich außerhalb des betrachteten Gebiets. Bei der automatischen Anfertigung der Zeichnungen wurden jedoch auch diese Punkte mitberücksichtigt.

Abb. 5.5 zeigt Frequenzspektren der Feldgrößen im Zentrum des Beckens sowie an zwei weiteren Orten nördlich und südlich des Zentrums. Ein Vergleich mit Abb. 4.8 ergibt prinzipielle Übereinstimmung hinsichtlich der Lage des dominanten Peaks bei einer Periode von etwa 10 Tagen, welcher der Eigenschwingung $(m, n) = (1, 1)$ aus Tabelle 4.1 zuzuordnen ist, sowie hinsichtlich des steilen Abfalls des Spektrums zu hohen Frequenzen hin. Bei tieferen Frequenzen ergibt sich jedoch ein deutlich verschiedenes Bild. Auf die weiteren Eigenschwingungen weist nur noch ein weniger stark ausgeprägtes Maximum bei 15-16 Tagen hin,

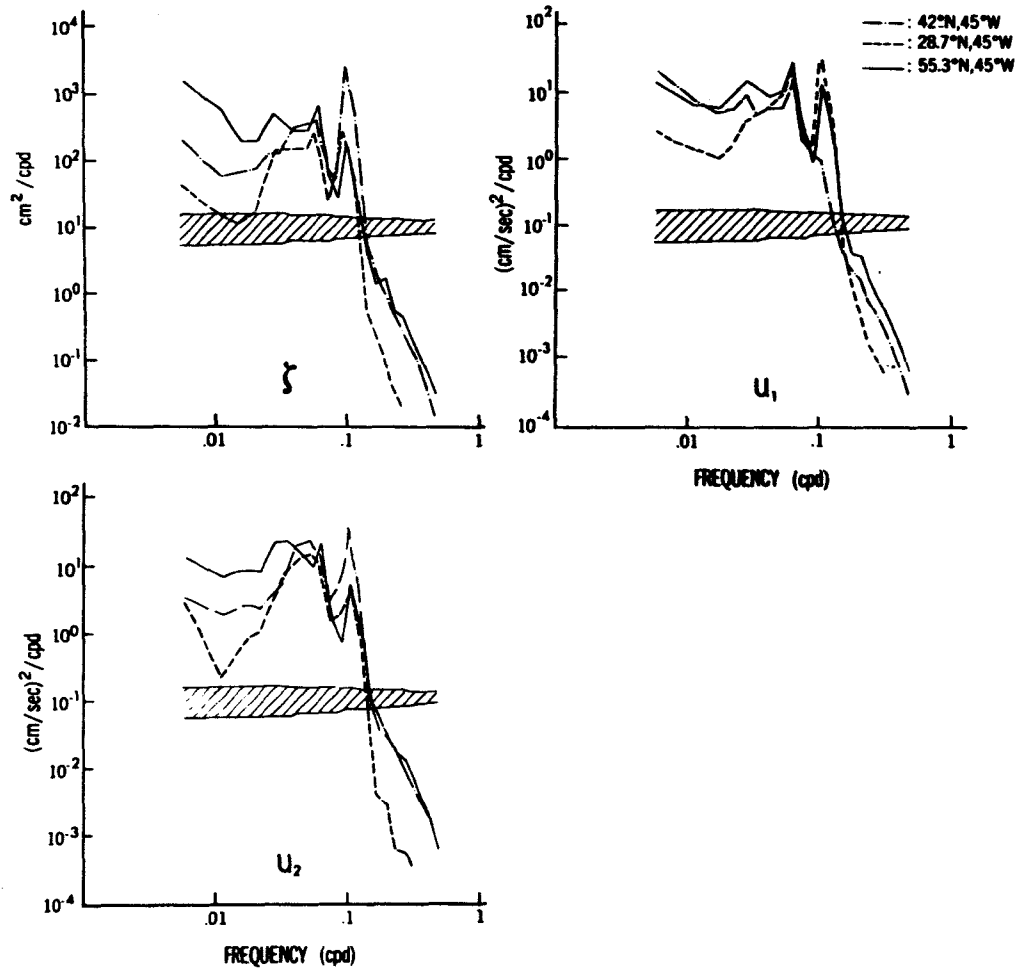


Abb. 5.5:

Frequenzspektren der Variablen des numerischen Modells an drei verschiedenen Orten nach II. Der schraffierte Bereich gibt das 95%-Konfidenzintervall an.

welches den Kombinationen (3,1) bzw. (1,2) zuzuordnen ist. Kombinationen mit geradem m scheiden aus, da bei dem zentralen Längengrad die Felder U_1 und ζ eine Nullstelle und U_2 ein Minimum der rms-Amplitude haben. Dadurch entfällt insbesondere der Beitrag der Kombination (2,1) in Abb. 5.5. Weitere Maxima sind nicht mehr eindeutig zu identifizieren, und zu tieferen Frequenzen hin sind die Spektren mehr oder weniger weiß. Der Grund für das Ausbleiben weiterer Maxima ist in der Wirkung der Horizontalreibung zu suchen; vgl. die Diskussion im Anschluß an (4.55).

Schließlich betrachten wir noch die lokale Korrelation der numerischen Lösung zum atmosphärischen Kraftfeld. Abb. 5.6 zeigt Kohärenz und Phasendifferenz zwischen Strömungs- und Windkomponenten, sowie zwischen Oberflächenauslenkung und Luftdruck, im Zentrum des Beckens. Auch hier ergibt sich sehr weitgehende Übereinstimmung mit den Ergebnissen des analytischen Modells (Kap. IV.7). Bei niedrigen Frequenzen besteht praktisch keine Kohärenz zwischen ozeanischen und atmosphärischen Variablen. Zu hohen Frequenzen hin erfolgt ein sprunghafter Anstieg der Kohärenz für gewisse Kombinationen von Variablen ($u_1-\tau_1$, $u_2-\tau_2$, $\zeta-p$). Die Kohärenz wird allerdings nicht perfekt wie in (4.66). Dies liegt vorwiegend daran, daß in (4.66) die endliche Beckengröße nicht berücksichtigt ist. Außerdem ist in diesem Frequenzbereich die für (4.66) vorausgesetzte quasilineare Beziehung (2.12) eine weniger gute Approximation.

V.3. Rektifikation

In einem streng linearen System erzeugt ein Kraftfeld mit verschwindendem Mittelwert eine ozeanische Reaktion, deren Mittelwert ebenfalls verschwindet. Die Bewegungsgleichungen (3.6) sind aber infolge der Advektionsterme nicht linear. Der Mittelwert der numerischen Lösung wird daher Aufschluß über die Bedeutung der nichtlinearen Terme geben.

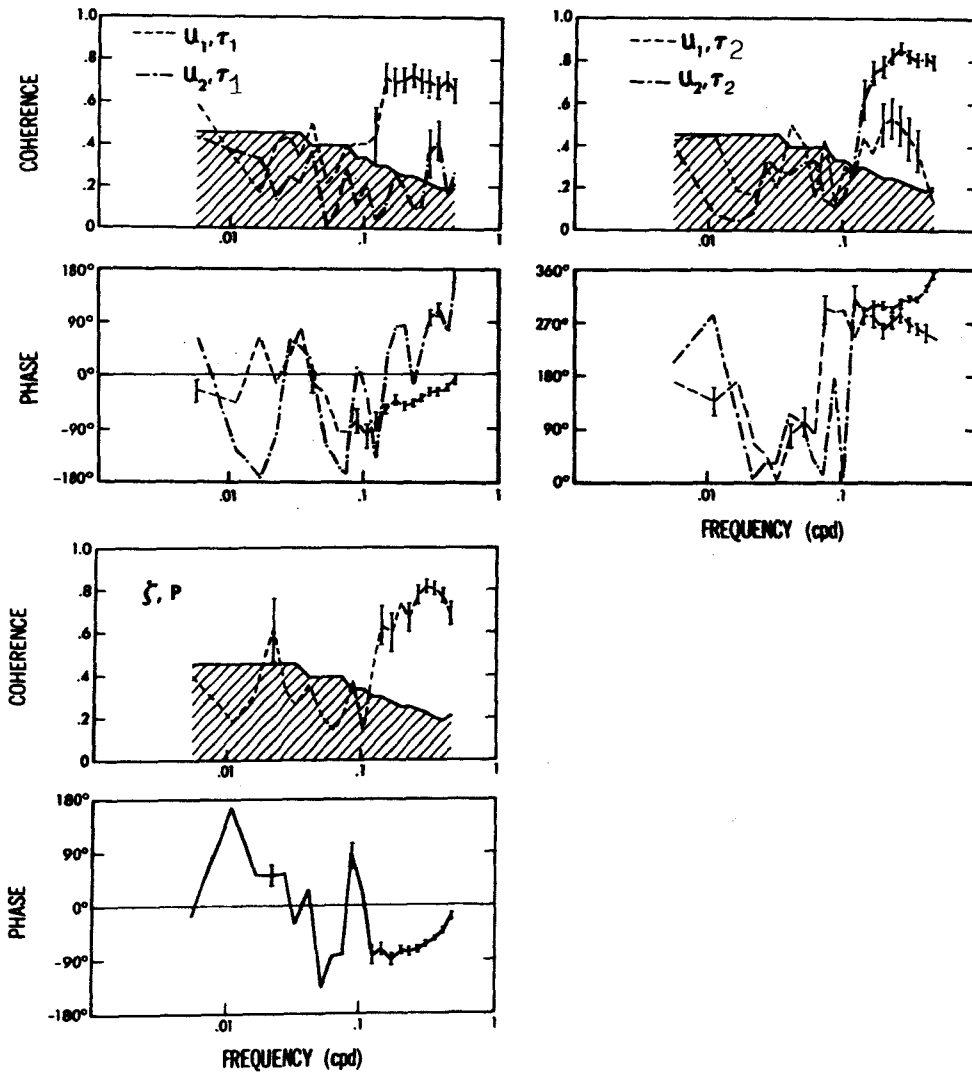


Abb. 5.6:

Kreuzspektren zwischen verschiedenen ozeanischen und atmosphärischen Variablen im Beckenzentrum nach II. Phase positiv wenn ozeanische Variable führt.

Die Mittelwerte der drei Feldgrößen sind in Abb. 5.7 dargestellt. Verglichen mit den typischen Amplituden der Schwan-
kungen sind die Mittelwerte sehr klein; sie erreichen maximal
0.3 cm (ζ), 0.1 cm/s (U_1) bzw. 0.2 cm/s (U_2), also etwa
5-10 % der mittleren quadratischen (rms) Amplituden. Diese
Werte lassen sich aus einer 4-jährigen Zeitreihe statistisch
nicht eindeutig als von Null verschieden bestimmen. Bei einer
Meßreihendauer von 4 Jahren und einer dominanten Zeitskala
von 10 Tagen enthält eine Zeitreihe etwa 140 unabhängige Werte.
Der Fehler des Mittelwerts der Zeitreihe ist dann $(140)^{-1/2}$
bezogen auf die Standardabweichung, also etwa 8 % der in Abb.
5.4 gezeigten rms-Amplituden.

Der maximale Meridionaltransport tritt am westlichen Beckenrand
in einer dünnen Grenzschicht auf. Der über die Grenzschicht
integrierte rektifizierte Transport entspricht 1-2 Sverdrup
und ist nach Norden (Süden) in der nördlichen (südlichen)
Hälfte des Beckens gerichtet. Diese Vorzeichen stimmen mit
analytischen Resultate von PEDLOSKY (1965) und VERONIS (1970)
überein. Der absolute Betrag ist jedoch so gering, daß sich
ein klarer Widerspruch zu der Aussage von VERONIS (1970) er-
gibt, wonach die rektifizierte Strömung nahezu von gleicher
Größenordnung wie die windinduzierte mittlere Zirkulation
sein kann.

Zwei Gründe kommen zur Erklärung dieser Diskrepanz in Betracht.
Zum einen haben die Modellrechnungen von VERONIS (1970) eine
wesentlich höhere Rossby-Zahl, als sie sich im vorliegenden
Modell aufgrund der Amplitude der Windschwankungen ergibt.
Entsprechendes gilt übrigens auch für die Tankversuche von
WHITEHEAD (1975) sowie FIRING & BEARDSLEY (1976). Zum anderen
ergibt sich ein Unterschied durch die stochastische Natur des
Prozesses, die bei VERONIS nicht betrachtet wurde. Um dies zu
verstehen, greifen wir auf die quasigeostrophische Bewegungs-
gleichung in der nichtlinearen Form (3.17) zurück, die sich
schreiben läßt als

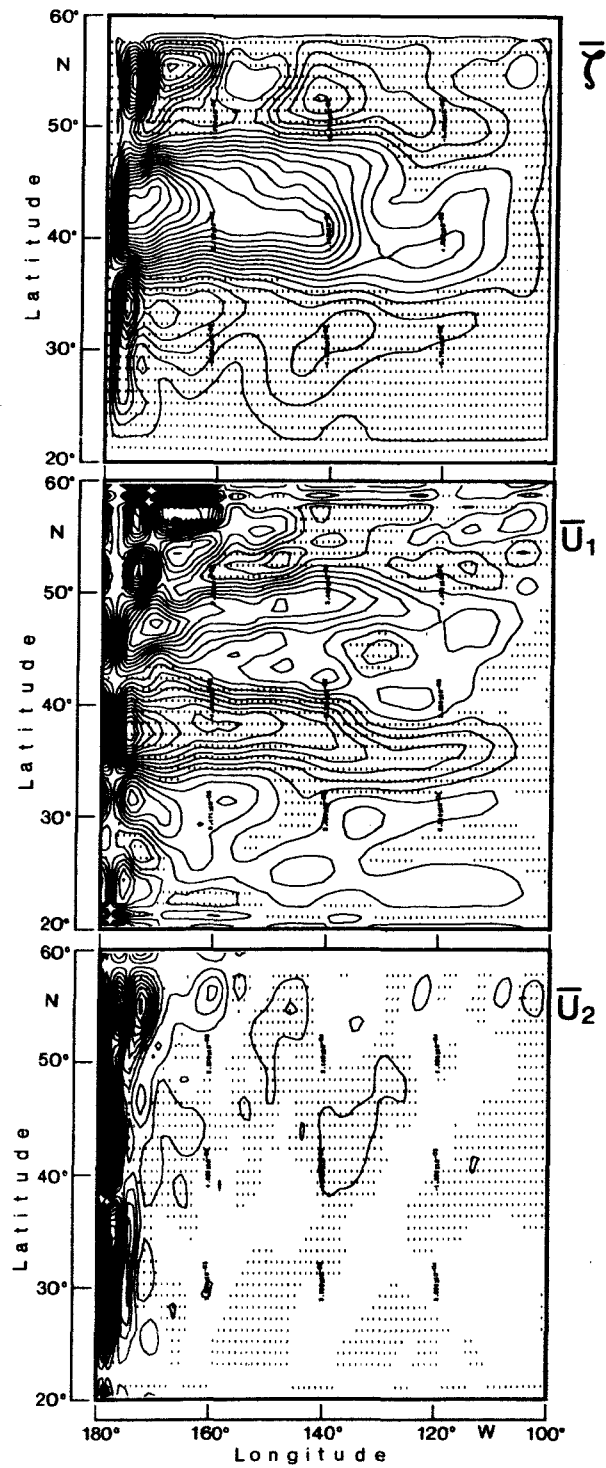


Abb. 5.7:

Horizontale Verteilung des zeitlichen Mittelwerts.

Isolinienintervalle:

0.017 cm (ζ), 0.007 cm/s (U_1), 0.015 cm/s (U_2)

$$L \Psi(\underline{x}, t) = a(\underline{x}, t) \quad (5.3)$$

mit nichtlinearem Operator L. Statistische Mittelung von (5.3) ergibt, mit $\langle a \rangle = 0$ und $\Psi' = \Psi - \langle \Psi \rangle$

$$L \langle \Psi \rangle = - \left\langle \int \left(\frac{\Psi'}{H_0}, \nabla^2 \Psi' \right) \right\rangle \quad (5.4)$$

Die rechte Seite von (5.4) stellt die durch Rektifikation entstandene Antriebsfunktion der mittleren Zirkulation dar. Wir werten sie aus für einen Wellenansatz der Form (4.7), d.h.

$$\Psi'(\underline{x}, t) = \sum_{\underline{k}, \omega} \Psi_{\underline{k}\omega} e^{i(\underline{k} \cdot \underline{x} - \omega t)} \quad (5.5)$$

und erhalten

$$L \langle \Psi \rangle = - \frac{1}{H_0} \sum_{\underline{k}, \underline{k}', \omega, \omega'} \underline{k} \times \underline{k}' \langle \Psi_{\underline{k}\omega} \Psi_{\underline{k}'\omega'} \rangle e^{i[(\underline{k} + \underline{k}') \cdot \underline{x} - (\omega + \omega')t]} \quad (5.6)$$

Dabei spielt es keine Rolle, ob Frequenzen und Wellenzahlen gemäß der Dispersionsrelation (4.8) verknüpft sind oder nicht. Sind nun die Phasen der Komponenten mit verschiedenen Wellenzahlen zufällig und unabhängig voneinander, oder anders ausgedrückt ist das Wellenfeld räumlich homogen, so ergibt sich unmittelbar

$$L \langle \Psi \rangle = 0 \quad (5.7)$$

Das Bestehen von festen Phasenbeziehungen ist also (in der quasigeostrophischen Näherung) eine notwendige Voraussetzung dafür, daß überhaupt Rektifikation auftreten kann. Feste Phasenbeziehungen wird man am ehesten in der Nähe lateraler Ränder infolge von Reflexionen erwarten. Sie könnten jedoch auch als Folge nichtlinearer Wechselwirkungen der verschiedenen Wellenkomponenten sowie durch feste Phasenbeziehungen im Windfeld auftreten.

Zusammenfassend bleibt als Resultat der numerischen Rechnungen

festzuhalten, daß winderzeugte Fluktuationen keinen nennenswerten Einfluß auf die mittlere Zirkulation haben.

V.4. Der Einfluß der Bodentopographie

Zieht man den irregulären Verlauf der ozeanischen Bodentopographie in Betracht, so ergeben sich wesentliche neue Gesichtspunkte für das Problem der winderzeugten Strömungsanomalien. Durch die Topographie kommt eine weitere Längenskala (beziehungsweise ein Spektrum von Längenskalen) ins Spiel, und die Skalen in Ozean und Atmosphäre sind nicht mehr direkt miteinander verknüpft.

Der Einfluß irregulärer Topographie auf ozeanische Strömungen wurde bislang mit verschiedenen Methoden theoretisch untersucht. RHINES & BRETHERTON (1973), THOMSON (1975) sowie ODULO & PELINOVSKY (1978) benutzten analytische Approximationen, die auf der Kleinheit gewisser Parameter beruhen (z.B. relative Amplitude der Topographie, Skalenverhältnis von Topographie und Strömung). Dagegen wandten HERRING (1977) und HOLLOWAY (1978) eine Technik an, die für die Behandlung starker Wechselwirkungsprobleme entwickelt worden ist. BRETHERTON & HAIDVOGEL (1976) führten eine numerische Integration der (stark vereinfachten) quasigeostrophischen Bewegungsgleichung (3.17) durch. All diesen Arbeiten ist gemeinsam, daß die Evolution eines anfangs gegebenen Strömungsfeldes untersucht wird. Schwerpunkt der Untersuchungen ist die nichtlineare Energiekaskade; der Prozess der atmosphärischen Anregung wird dagegen nicht betrachtet.

Wir wollen zunächst die Frage diskutieren, ob die ozeanische Reaktion auf großräumige Windfelder auch über irregulärer Topographie weiterhin vorwiegend barotrop bleibt, so wie das über ebenem Boden der Fall ist. Dazu gehen wir davon aus, daß die Horizontalskala der atmosphärischen Felder in der Regel erheblich größer ist als die für die Bodentopographie charakteristische Länge. Wie in Kap. III.2 gezeigt, greift die winderzeugte Strömungsschwankung bis zum Boden durch. Durch das Bodenprofil wird hier ein Vertikalgeschwindigkeitsfeld erzeugt, dessen Horizontalskala der des Bodens entspricht. Durch dieses

Vertikalgeschwindigkeitsfeld kann nun entweder ein zusätzliches barotropes Signal, oder aber eine barokline Strömung induziert werden. Welcher der beiden Fälle wirklich auftritt, kann auf die gleiche Weise wie in Kap. III.2 festgestellt werden. Bei der Definition (3.4) der Eindringtiefe h_e muß natürlich die Integration vom Boden aus beginnen. Nimmt man die Schichtung (3.2) auch für den tiefen Ozean als gültig an, so erhält man im wesentlichen (3.5), wobei allerdings N_0 durch N_H , die Schichtung am Boden, zu ersetzen ist. Da $N_H/N_0 \approx 0.1$ ist, verschiebt sich in Abb. 3.1 die Kurve konstanter Eindringtiefe zu höheren Wellenzahlen hin, und zwar um mindestens den Faktor $10^{1/2} \approx 3$.

Bei diesen hohen Wellenzahlen enthält jedoch das Bodenprofil noch genügend viel Variabilität, um barokline Bewegungen zu erzeugen. Nach BELL (1975) ist das Spektrum des Bodenprofils isotrop und verhält sich wie k^{-2} bei höheren Wellenzahlen. In der kinematischen Randbedingung tritt nur der Gradient des Bodenprofils auf; dessen Spektrum ist weiß. Diese Aussage gilt bis zu Wellenlängen von wenigen Kilometern. Daraus folgt, daß bei typischer ozeanischer Topographie das windinduzierte Strömungsfeld eine kleinskalige barokline Komponente hat, welcher in der Regel zum Boden hin intensiviert ist (vgl. McWILLIAMS, 1974).

Ein barotropes Modell kann jedoch trotzdem nützliche Aussagen liefern, sofern man nur an der großräumigen Struktur der Strömung interessiert ist. Die Gleichungen (3.6) bzw. (3.17) bleiben dann gültig, falls man alle Variablen als geeignete horizontale Mittelwerte interpretiert. Voraussetzung ist allerdings, daß die durch die barokline Bewegung und die Wechselwirkung mit der kleinskaligen Topographie hervorgerufenen Reynolds-Spannungen entweder vernachlässigbar sind oder in die Parametrisierung von Horizontal- bzw. Bodenreibung einbezogen werden können.

Die numerische Integration von (3.6) wurde für das in Abb. 5.8a dargestellte Gebiet durchgeführt. Die Topographie ist in dieser Abbildung in Form der Isolinien von f/H wiedergegeben;

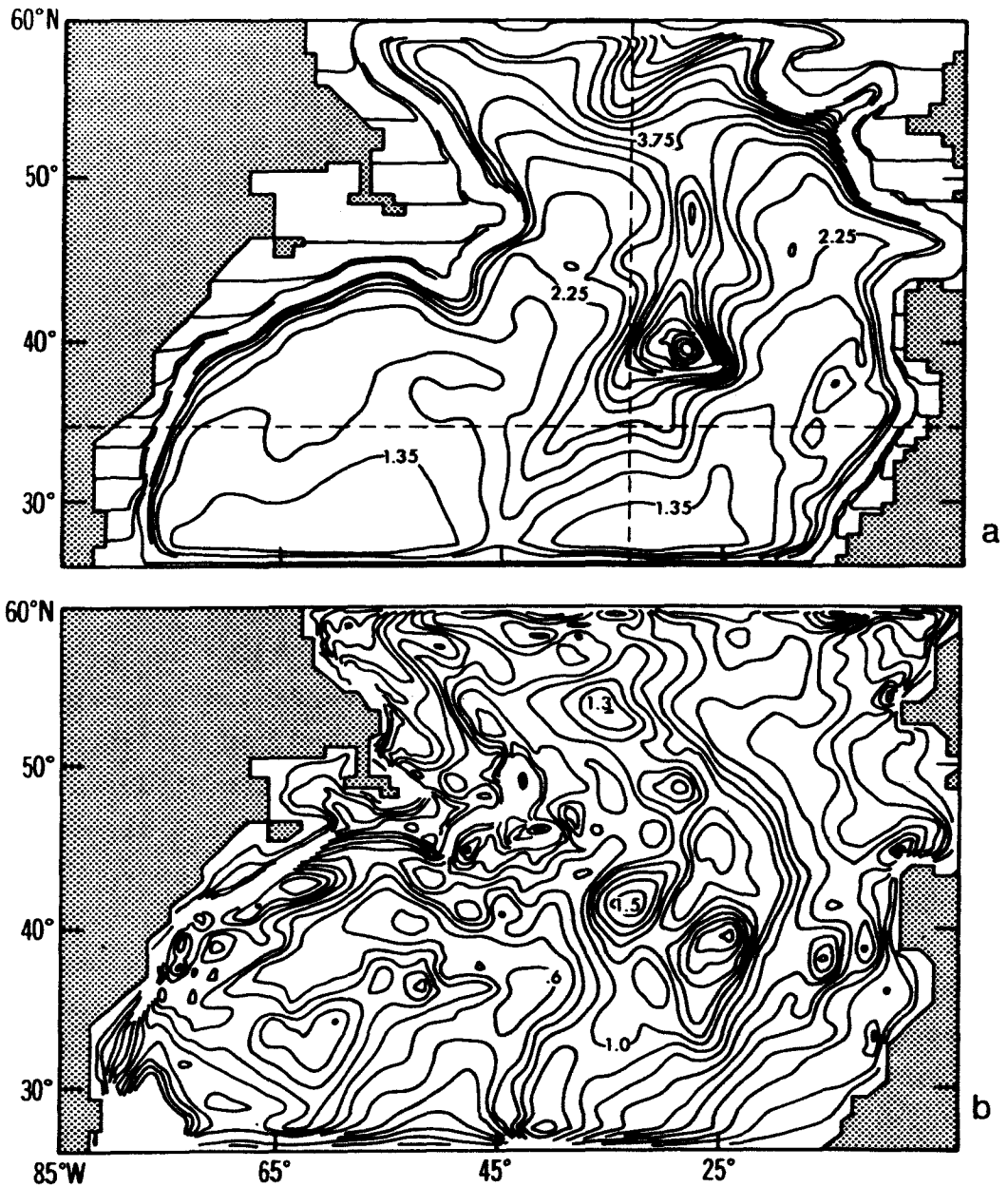


Abb. 5.8:

- a) Verteilung von f/H im Modell des Nordatlantik. Einheit $10^{-10} \text{ (cm s)}^{-1}$, Linienintervall $0.3 \cdot 10^{-10} \text{ (cm s)}^{-1}$
- b) Mittlere quadratische Amplitude des horizontalen Massentransportes in $10^6 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$. Linienintervall $10^5 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$.

diese Größe ist dynamisch relevanter als das Bodenprofil allein. Die tatsächliche Bodentopographie des atlantischen Ozeans wurde für die Zwecke des numerischen Modells geglättet.

Wie im Fall des ebenen Bodens, so war auch in diesem numerischen Experiment die rektifizierte mittlere Strömung äußerst klein und nicht weiter von Interesse. Es scheint demnach, daß trotz der von der Topographie erzwungenen kleineren Skala der Bewegung die nichtlinearen Wechselwirkungen weiterhin nur eine untergeordnete Rolle spielen.

Die mittlere Amplitude der Transportfluktuationen, $\langle M_1^2 + M_2^2 \rangle^{1/2}$ ist in Abb. 5.8b dargestellt. Ihre räumliche Verteilung ist stark von der Topographie beeinflusst. Maximalwerte treten, außer in der Nähe der Küsten, im Bereich des mittelatlantischen Rückens auf. Die in Abb. 5.4 vorhandene Ost-West-Asymmetrie ist nur noch andeutungsweise festzustellen. Die Größenordnung der Amplitude entspricht dagegen in etwa dem Fall des ebenen Bodens.

Während die Spektren in Abb. 5.5 typisch für den größten Teil des Beckens waren, ergab sich im topographischen Experiment eine starke räumliche Variabilität nicht nur der Amplitude, sondern auch der Form der Frequenzspektren. Auf die Wiedergabe einzelner Spektren wird daher verzichtet. Abb. 5.9 zeigt die Isolinien der Spektraldichte $E_{M_1}(\omega) + E_{M_2}(\omega)$ als Funktion von Frequenz und Breitengrad (a) bzw. Längengrad (b). In Abb. 5.9a fällt besonders das Energiemaximum bei etwa 65° W und einer Periode von 10 Tagen auf. An dieser Stelle ist die Topographie nahezu eben, und man erwartet ähnliche Verhältnisse wie im idealisierten Becken. Dagegen liegt in Abb. 5.9b bei 40° N das Maximum bei 5 Tagen. Wellen dieser Periode treten im rechteckigen Becken nicht auf; es handelt sich eindeutig um topographische Wellen. An den meisten Orten liegt ein Energiemaximum zwischen diesen Perioden; wie aus Abb. 5.8a hervorgeht, ist der topographische gegenüber dem planetarischen Einfluß meist dominant.

In Abb. 5.9a zeigt sich weiterhin starke Variabilität der Spektren im Periodenbereich um 50 Tage. In diesem Bereich erwarten wir nach dem oben gesagten ein Sverdrup-Gleichgewicht. Unter

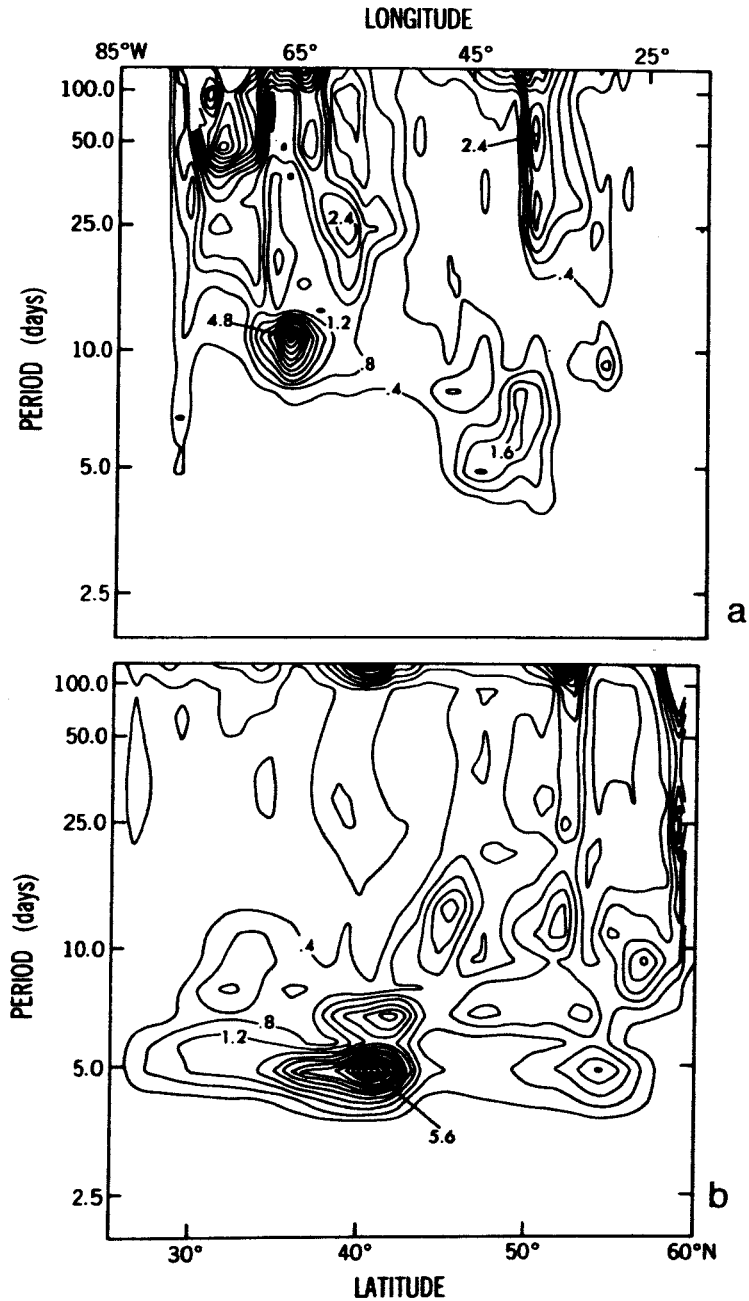


Abb. 5.9:

Spektrale Energiedichte des Massentransports als Funktion der Frequenz und

a) der geographischen Länge bei 35° N

b) der geographischen Breite bei 28° W

Die Linien 35° und 28° W sind in Abb. 5.8a gestrichelt eingezeichnet.

Berücksichtigung der Bodentopographie lautet dies

$$\vec{H} \cdot \vec{M} \cdot \vec{\nabla} (f/H) = a(x, z) \quad (5.8)$$

Durch (5.8) ist der Transport normal zu den Kurven mit gleichem f/H -Wert gegeben; die Tangentialkomponente findet man durch Integration der Kontinuitätsgleichung entlang dieser Kurve. Wie HASSELMANN (1980) ausführlich diskutiert, kommt es nun entscheidend darauf an, ob die Isolinien von f/H geschlossen sind oder an den Küsten enden. Im letzteren Fall ergeben sich gegenüber $H = \text{const}$ keine wesentlich neuen Gesichtspunkte. Auf geschlossenen Kurven versagt dagegen die Approximation (5.8). Dieser Fall liegt hier vor: Wie aus Abb. 5.8a ersichtlich ist, schneidet der Breitenkreis 35° N mehrfach geschlossene f/H -Kurven. Die starke niederfrequente Variabilität in Abb. 5.9a wird dadurch verständlich.

Die Kohärenz zwischen ozeanischen und atmosphärischen Variablen, die schon im rechteckigen Becken nur bei hohen Frequenzen und nur zwischen gewissen Variablen besteht, wird durch die Bodentopographie vollends zerstört. Dies liegt zum Teil an der höheren Frequenz der topographischen (gegenüber planetarischen) Wellen, wodurch der Resonanzbereich insgesamt breiter wird. Zum anderen haben hochfrequente erzwungene Strömungen jetzt eine andere Wellenzahlstruktur als die jeweiligen atmosphärischen Felder, wodurch ebenfalls die Kohärenz reduziert wird. Nur im südwestlichen Teil des Beckens, bei nahezu ebenem Boden, ergeben sich ähnliche Resultate wie in Kap. V.2 (Abb. 5.6).

Um den Einfluß der Küstengeometrie von dem der Bodentopographie zu trennen, wurde schließlich noch ein Experiment mit der Geometrie von Abb. 5.8a, jedoch ebenem Boden gemacht. Es zeigte sich, daß die Küstengeometrie wenig Einfluß auf die Lösung hat; gegenüber Kap. V.2 ergaben sich keine wesentlichen Unterschiede.

VI. SCHLUSSBEMERKUNG

Das Ziel der vorliegenden Arbeit war, den Prozeß der atmosphärischen Anregung von niederfrequenten Strömungsschwankungen im Ozean zu verstehen. Der gegenüber früheren Arbeiten wesentlich neue Gesichtspunkt besteht in der statistischen Betrachtungsweise. Diese erweist sich als unumgänglich, wenn man zu Aussagen kommen will, die sich zumindestens prinzipiell durch Messungen im Ozean überprüfen lassen.

Einige Aspekte des Problems können bereits mit einem linearen analytischen Modell zufriedenstellend beantwortet werden. In einem großen Bereich von Raum- und Zeitskalen ist die ozeanische Reaktion vorwiegend barotrop; ausschließlich der barotrope Anteil wird in dieser Arbeit behandelt. Die allgemeine Struktur der barotropen Reaktion, die typische Form von Frequenzspektren und horizontale Ausbreitungscharakteristiken werden diskutiert. Es zeigt sich, daß selbst unter sehr idealisierten Voraussetzungen fast keine Kohärenz der ozeanischen mit den atmosphärischen Feldvariablen besteht. Mit Hilfe eines nichtlinearen numerischen Modells wird ferner gezeigt, daß die Rektifikation windinduzierter Schwankungen für die allgemeine Zirkulation des Ozeans nur eine untergeordnete Rolle spielt.

Einige wichtige Problemkreise bleiben jedoch unerledigt. Da ist zunächst die Frage nach der baroklinen Reaktion, die ja z.B. für alle mit dem Temperaturfeld und Wärmetransport zusammenhängenden Probleme wichtig ist. Wie oben gezeigt, hängt die Stärke des baroklinen Strömungsfeldes entscheidend von der Energie der atmosphärischen Felder bei hohen Wellenzahlen ab. Letztere ist leider nur sehr unzureichend bekannt. Um hier weiterzukommen, sind kleinskalige (O(20-50)km) Messungen der atmosphärischen Felder über dem Ozean nötig. Bislang sind solche Messungen deswegen nicht durchgeführt worden, weil diese Information für das Verständnis der in der Atmosphäre ablaufenden Prozesse nicht zentral ist. Es scheint deshalb, daß die Initiative zu Messungen dieser Art mehr von Ozeanographen als von Meteorologen ausgehen müßte. Ein systematisches Meßprogramm

ist mit den derzeit vorhandenen Hilfsmitteln jedoch nicht in Sicht, hauptsächlich wegen des großen Aufwandes, der dazu nötig wäre. Es erscheint möglich, daß sich in der Zukunft durch die Satelliten-Ozeanographie diese Situation verbessern wird.

Ein zweiter unbefriedigender Punkt betrifft die Interpretation ozeanischer Beobachtungen im Hinblick auf den in dieser Arbeit untersuchten Prozess. Die Amplitude der Strömungsschwankungen hängt ja zum Teil stark von Reibungsparametern ab, deren Größenordnung nur sehr unzureichend bekannt ist. Eher schon könnten Messungen der Fluktuationsamplitude zur Bestimmung dieser Reibungsparameter benutzt werden, sofern anderweitige Evidenz dafür vorhanden ist, daß die Fluktuationen atmosphärisch erzeugt sind. Solche Evidenz ist aber höchstens indirekt zu erhalten, da, wie ausführlich dargestellt, das Vorhandensein einer Kausalbeziehung im allgemeinen keine Kohärenz zwischen atmosphärischen und ozeanischen Variablen zur Folge hat. Versuche, eine solche Kohärenz zu messen, werden daher in der Regel nicht erfolgreich sein. Indirekte Evidenz läßt sich aber möglicherweise aus den Propagationseigenschaften von Fluktuationen im Ozean erhalten; vgl. etwa das Phasendiagramm in Abb. 5.2a. Solche Beobachtungen sind nun ebenfalls sehr aufwendig; sie erfordern die gleichzeitige Messung von Strömung und evtl. Bodendruck an mindestens drei horizontal hinreichend benachbarten Orten für die Dauer etwa eines Jahres oder länger. Es ist zu hoffen, daß die geplanten Messprogramme des neugegründeten Sonderforschungsbereichs "Warmwassersphäre des Atlantiks" an der Universität Kiel hierzu einen Beitrag leisten werden.

Danksagung

Mein besonderer Dank gilt Dr. G. Philander, dessen Enthusiasmus und fortwährendes Interesse wesentlich zum Entstehen dieser Arbeit beigetragen haben. Herrn Prof. Dr. L. Magaard bin ich für eine kritische Durchsicht des Manuskripts zu Dank verpflichtet. Viele fruchtbare Diskussionen hatte ich mit Drs. C. Frankignoul und P. Müller.

Ferner danke ich Mr. R.C. Pacanowski für die umfangreiche Programmierung der numerischen Modellrechnungen, sowie Herrn A. Eisele, Frau E. Mempel und Frau I. Schuster für ihre Hilfe bei der Fertigstellung der Arbeit.

Literaturverzeichnis

- Baker, D.I. Jr., W.D. Nowlin, Jr., R.D. Pillsbury und H.L. Bryden, 1977: Antarctic circumpolar current: Space and time fluctuations in the Drake Passage. *Nature* 268, 696-699.
- Batchelor, G.K., 1953: The theory of homogeneous turbulence. Cambridge University Press, 197 pp.
- Bell, T.H. Jr., 1975: Statistical features of sea-floor topography. *Deep-Sea Res.* 22, 883-892.
- Blumberg, A.F., 1977: Numerical tidal model of Chesapeake Bay. *J. Hydraulics Div., Proc. ASCE* 103, No. HY 1, 1-10.
- Bretherton, F.P. and D.B. Haidvogel, 1976: Two-dimensional turbulence above topography. *J. Fluid Mech.* 78, 129-154.
- Bunker, A.F., 1976: Computations of surface energy flux and annual air-sea interaction cycles of the North Atlantic ocean. *Mon. Wea. Rev.* 104, 1122-1140.
- Courant, R., K. Friedrichs und H. Lewy, 1928: Über die partiellen Differenzengleichungen der mathematischen Physik. *Math. Annalen* 100, 32-74.
- Dantzler, H.Lee, Jr., 1976: Geographic variations in intensity of the North Atlantic and North Pacific oceanic eddy fields. *Deep-Sea Res.* 23, 783-794.
- Eckart, C., 1960: Hydrodynamics of oceans and atmospheres. Pergamon Press, Oxford, 290 pp.
- Emery, W.J., A. Gallegos und L. Magaard, 1980: Frequency-wave-number spectra of wind stress and sea surface temperature in the eastern North Pacific. Unveröff. Manuskript.

Firing, E. und R.C. Beardsley, 1976: The behavior of a barotropic eddy on a β -plane. J. Phys. Oceanogr. 6, 57-65.

Fortak, Heinz, 1971: Meteorologie. Carl Habel, Berlin, 287 pp.

Frankignoul, C. und P. Müller, 1979a: Quasi-geostrophic response of an infinite β -plane ocean to stochastic forcing by the atmosphere. J. Phys. Oceanogr. 9, 104-127.

Frankignoul, C. und P. Müller, 1979b: On the generation of geostrophic eddies by surface buoyancy flux. J. Phys. Oceanogr. 9, 1207-1213.

Garratt, J.R., 1977: Review of drag coefficients over oceans and continents. Mon. Wea. Rev. 105, 915-929.

Garret, C.J.R. und W.H. Munk, 1972: Space-time scales of internal waves. Geophys. Fluid Dyn. 2, 225-264.

Goldenberg, S.B. und J.J. O'Brien, 1980: Time and space variability of tropical Pacific wind stress. Mon. Wea. Rev. (zum Druck eingereicht).

Greisman, Paul und Knut Aagaard, 1979: Seasonal variability of the West Spitsbergen Current. Ocean Modelling, No. 19. Unveröff. Manuskript.

Harrison, D.E., 1979: On the equilibrium linear basin response to fluctuating winds and mesoscale motions in the ocean. J. Geophys. Res. 84, 1221-1224.

Hasse, L. und V. Wagner, 1971: The relationship between geostrophic and surface wind at sea. Mon. Wea. Rev. 99, 255-260.

Hasselmann, K., 1976: Stochastic climate models, part I. Tellus 28, 473-485.

Hasselmann, K., 1980: An ocean model for climate variability studies. Unveröff. Manuskript.

Herring, J.R., 1977: On the statistical theory of two-dimensional topographic turbulence. J. Atmos. Sci. 34, 1731-1750.

Holland, W.R. und L.B. Lin, 1975: On the generation of meso-scale eddies and their interaction with the oceanic general circulation, part 1 & 2. J. Phys. Oceanogr. 5, 642-669.

Holloway, Greg, 1978: A spectral theory of nonlinear barotropic motion above irregular topography. J. Phys. Oceanogr. 8, 414-427.

Krauß, Wolfgang, 1973: Methods and results of theoretical oceanography. Gebr. Bornträger, Berlin, 302 pp.

LeBlond, P.H. und L.A. Mysak, 1977: Waves in the Ocean. Elsevier, Amsterdam, 602 pp.

Leetma, A., 1978: Fluctuating winds: an energy source for mesoscale motions. J. Geophys. Res. 83, 427-430.

Leetma, A. und A.F. Bunker, 1978: Updated charts of the mean annual wind stress, convergences in the Ekman layers, and Sverdrup transports in the North Atlantic. J. Mar. Res. 36, 311-322.

Longuet-Higgins, M.S., 1965: The response of a stratified ocean to stationary or moving wind-systems. Deep-Sea Res. 12, 923-973.

Magaard, Lorenz, 1977: On the generation of baroclinic Rossby waves in the ocean by meteorological forces. J. Phys. Oceanogr. 7, 359-364.

McWilliams, J.C., 1974: Forced transient flow and small scale topography. Geophys. Fluid Dyn. 6, 49-79.

Meincke, J., 1976: Coupling between bottom currents and weather pattern on the Iceland-Faroe ridge. Int. Council for Exploration of the Sea. C.M. 1976/C:30. Unveröff. Manuskript.

Mesinger, F. und A. Arakawa, 1976: Numerical methods used in atmospheric models. GARP Publ. Ser. No. 17, WMO-ICSU.

Munk, W.H., 1950: On the wind-driven ocean circulation. J. Meteorol. 7, 79-93.

Müller, P. und C. Frankignoul, 1980: Direct atmospheric forcing of quasi-geostrophic eddies. Unveröff. Manuskript.

Odulo, A.B. und E.N. Pelinovsky, 1978: Rossby wave attenuation above a rough bottom. Polymode News No. 53. Unveröff. Manuskript.

Pedlosky, J., 1965: A study of time-dependent ocean circulation. J. Atmos. Sci. 22, 267-272.

Pedlosky, J., 1967: Fluctuating winds and the ocean circulation. Tellus 19, 250-257.

Pedlosky, J., 1979: Geophysical Fluid Dynamics. Springer-Verlag, New York, 624 pp.

Philander, S.G.H., 1978: Forced oceanic waves. Rev. Geophys. Space Phys. 16, 15-46.

Phillips, N.A., 1966: Large-scale eddy motion in the western Atlantic. J. Geophys. Res. 71, 3883-3891.

Phillips, O.M., 1966: The dynamics of the upper ocean. Cambridge University Press, 261 pp.

Rhines, P.B., 1977: The dynamics of unsteady currents. The Sea, Vol. 6, Wiley, 189-318.

Rhines, P.B. und F.P. Bretherton, 1973: Topographic Rossby waves in a rough-bottomed ocean. J. Fluid Mech. 61, 583-607.

Robertson, H.P., 1940: The invariant theory of isotropic turbulence. Proc. Camb. Phil. Soc. 36, 209.

#

Semtner, A.J. Jr. und W.R. Holland, 1978: Intercomparison of quasi-geostrophic simulations of the western North Atlantic circulation with primitive equation results. J. Phys. Oceanogr. 8, 735-754.

Smith, S.D. und E.G. Banke, 1975: Variation of the sea surface drag coefficient with wind speed. Quart. J. Roy. Meteor. Soc. 101, 665-673.

Stommel, H., 1948: Westward intensification of wind-driven ocean currents. EOS Trans. Am. Geophys. Un. 29, 202-206.

Sverdrup, H.U., 1937: On the evaporation from oceans. J. Mar. Res. 1, 3-14.

Thomson, R.E., 1975: The propagation of planetary waves over a random topography. J. Fluid Mech. 70, 267-285.

Veronis, George, 1970: Effect of fluctuating winds on ocean circulation. Deep-Sea Res. 17, 421-434.

Veronis, George und Henry Stommel, 1956: The action of variable wind stresses on a stratified ocean. J. Mar. Res. 15, 43-75.

Whitehead, J.A., 1975: Mean flow generated by circulation on a β -plane: An analogy with the moving flame experiment. Tellus 28, 358-364.

Willebrand, Jürgen, 1978: Temporal and spatial scales of the wind field over North Pacific and North Atlantic. J. Phys. Oceanogr. 8, 1080-1094.

Willebrand, J. und J. Meincke, 1980: Statistical analysis of fluctuations in the Iceland-Scotland frontal zone. Deep-Sea Res. (im Druck).

Willebrand, J., S.G.H. Philander und R.C. Pacanowski, 1980: The oceanic response to large-scale atmospheric disturbances. J. Phys. Oceanogr. 10, 411-429.

Wyrтки, K., L. Magaard und J. Hager, 1976: Eddy energy in the oceans. J. Geophys. Res. 81, 2641-2646.

Rossby, C.-G. und Mitarbeiter, 1939: Relations between variations in the intensity of the zonal circulation of the atmosphere and the displacements of the semi-permanent centers of action. J.Mar.Res. 2, 38-55

Anhang A:

Notation bei der Spektraldarstellung

Seien $\chi_i(\underline{x}, t)$, $i = 1, 2, \dots$, stochastische Funktionen von Ort und Zeit, welche räumlich homogen und zeitlich stationär sind und verschwindenden Mittelwert haben. Die wichtigsten statistischen Eigenschaften der $\chi_i(\underline{x}, t)$ (bei gaußverteilten Variablen sogar alle) werden durch die Kovarianzmatrix

$$R_{ij}(\underline{r}, \tau) = \langle \chi_i(\underline{x}, t) \chi_j(\underline{x} + \underline{r}, t + \tau) \rangle \quad (A1)$$

beschrieben. Die Kreuzspektralmatrix A_{ij} ist mit R_{ij} verknüpft durch

$$A_{ij}(\underline{r}, \omega) = \frac{1}{\pi} \int d\tau R_{ij}(\underline{r}, \tau) e^{-i\omega\tau} \quad (A2)$$

Co- bzw. Quadraturespektrum sind definiert als Real- bzw. Imaginärteil des Kreuzspektrums,

$$A_{ij}(\underline{r}, \omega) = C_{ij}(\underline{r}, \omega) - iQ_{ij}(\underline{r}, \omega) \quad (A3)$$

Das Frequenzspektrum der Variablen $\chi_i(\underline{x}, t)$ ist dann

$$E_i(\omega) = A_{ii}(0, \omega) \quad (A4)$$

Für die Kohärenz γ_{ij} sowie Phasendifferenz ϕ_{ij} zwischen zwei Zeitreihen gilt

$$\gamma_{ij}(\underline{r}, \omega) = |A_{ij}(\underline{r}, \omega)| (E_i(\omega) E_j(\omega))^{-1/2} \quad (A5)$$

$$\tan \phi_{ij}(\underline{r}, \omega) = Q_{ij}(\underline{r}, \omega) / C_{ij}(\underline{r}, \omega) \quad (A6)$$

Bei dieser Definition ist die Phasendifferenz positiv, wenn die zuerst genannte Variable führt.

Die Fourier-Zerlegung von $\chi_i(\underline{x}, t)$ lautet in diskreter Schreibweise

$$\chi_i(\underline{x}, t) = \sum_{\underline{k}, \omega} a_{\underline{k}\omega}^i e^{i(\underline{k} \cdot \underline{x} - \omega t)} \quad (\text{A7})$$

mit der Realitätsbedingung

$$a_{\underline{k}}^i = (a_{-\underline{k}, -\omega}^i)^* \quad (\text{A8})$$

Die Homogenitäts- und Stationaritätsbedingung ist

$$2 \langle a_{\underline{k}\omega}^i a_{\underline{k}'\omega'}^j \rangle = F_{ij}(\underline{k}, \omega) \Delta \underline{k} \Delta \omega \delta_{\underline{k}\underline{k}'} \delta_{\omega\omega'} \quad (\text{A9})$$

Dabei bezeichnen $\Delta \underline{k}$, $\Delta \omega$ das Intervall, für das der entsprechende Summenterm in (A7) repräsentativ ist, und $\delta_{\underline{k}, \underline{k}'}$ bzw. $\delta_{\omega\omega'}$ das Kronecker- δ . Durch (A9) wird der Spektraltenŝor $F_{ij}(\underline{k}, \omega)$ definiert. Er ist mit der Kreuzspektralmatrix verknüpft durch

$$A_{ij}(\underline{r}, \omega) = \int d\underline{k} F_{ij}(\underline{k}, \omega) e^{-i\underline{k} \cdot \underline{r}} \quad (\text{A10})$$

Die Diagonalelemente $F_i(\underline{k}, \omega)$ sind die Frequenz-Wellenzahlspektren der jeweiligen Variablen und mit den Frequenzspektren verknüpft durch

$$E_i(\omega) = \int d\underline{k} F_i(\underline{k}, \omega) \quad (\text{A11})$$

Anhang B:

Numerische Auswertung der Integrale (4.41) und (4.60)

Für die numerische Auswertung der Integrale (4.41) bzw. (4.60) werden zunächst Polarkoordinaten r, θ gemäß

$$\begin{aligned} k_1 &= \alpha + r \cos \theta \\ k_2 &= r \sin \theta \end{aligned} \tag{B1}$$

eingeführt, deren Ursprung im Zentrum des Resonanzkreises (4.46) liegt. Anstelle von r wird als Integrationsvariable $x = \text{arsinh}(r/r_*)$ mit $r_* = 2\pi/2000 \text{ km}^{-1}$ verwandt. Dadurch wird wesentlich bessere numerische Konvergenz erreicht. Das Doppelintegral über x und θ wird durch eine Doppelsumme mit äquidistanten Schrittweiten $\Delta x = x_{\text{max}}/N_x$ und $\Delta \theta = 2\pi/N_\theta$ approximiert. Die Ergebnisse in Abb. 4.7 bzw. 4.10 wurden mit $x_{\text{max}} = 2.5$, $N_x = 55$ und $N_\theta = 45$ erhalten. Sie sind nahezu unabhängig von der Wahl dieser Parameter, sofern die Übertragungsfunktion (4.42b) des abgeschlossenen Beckens als Integrand gewählt wird.

Wegen des in Abschnitt IV.5 erwähnten fast diskontinuierlichen Verhaltens von $T^\infty(k)$ würde man jedoch extrem große Werte N_x, N_θ für eine gute Approximation des Integrals im unbegrenzten Gebiet benötigen. Die numerische Integration über $T^\infty(k)$ wird daher wie folgt modifiziert. Die Umgebung des Resonanzkreises wird durch die Bedingung

$$|\omega - \Omega(k)|^2 < \epsilon \text{ Min}(\omega^2, \Omega^2(k)) \tag{B2}$$

definiert (vgl. (4.47)). Dabei ist willkürlich $\epsilon = 0.2$ gewählt; der genaue Wert von ϵ erwies sich in weiten Grenzen als unwesentlich. Punkte, für welche die Ungleichung (B2) erfüllt war, wurden von der oben beschriebenen numerischen Integration ausgeschlossen. Zu dem so erhaltenen Wert muß noch der Beitrag des Resonanzkreises addiert werden, der durch die folgende analytische Approximation erhalten werden kann.

Das Integral (4.41) lässt sich schreiben als (Index ω unterdrückt)

$$\begin{aligned} E &= \int d\tilde{k} F_a(\tilde{k}) T^\infty(\tilde{k}) \\ &= \int r dr d\theta F_a(r, \theta) T^\infty(r, \theta) \end{aligned} \quad (B3)$$

Aus der Umgebung des Resonanzkreises

$$r = r_0 = [(\beta/2\omega)^2 - f_0^2/gH_0]^{1/2} \quad (B4)$$

kommt der Hauptbeitrag zum Integral. Daher wird (B3) approximiert durch

$$E = \int d\theta r_0 F_a(r_0, \theta) \int dr T^\infty(r, \theta) \quad (B5)$$

Zur Auswertung des Integrals über r führen wir zunächst $\xi = r - r_0$ als Integrationsvariable ein und entwickeln für kleine ξ :

$$T^\infty(r_0 + \xi, \theta) = [(2\omega r_0)^2 \xi^2 + R^2(r_0, \theta) + o(\xi^3)]^{-1} \quad (B6)$$

wobei $R(r, \theta)$ mit R_k aus (4.15) identisch ist.

Hinsichtlich ξ erstrecken wir die Integration von $-\infty$ bis $+\infty$ und erhalten:

$$\int_{-\infty}^{\infty} T(r_0 + \xi, \theta) d\xi = \pi [2\omega r_0 R(r_0, \theta)]^{-1} \quad (B7)$$

Damit ergibt sich aus (B5)

$$E = \frac{\pi}{2\omega} \int d\theta \frac{F_a(r_0, \theta)}{R(r_0, \theta)} \quad (B8)$$

Der Integrand von (B8) ist nicht länger pathologisch, und das Integral kann leicht numerisch ausgeführt werden.